[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{1}$]

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体のつくる立体を V とする。

(1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2) $a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

［ 東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{2}$ ］

★ ★

(1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。 $\dfrac{1}{2(k+1)} < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-x}{k+x}\,dx < \dfrac{1}{2k}$

(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

★ ★

[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{3}$]

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。

x を 0 以上 30 以下の整数とする。

L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作 (♯) を繰り返す。

(♯) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，

裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，

$0\leqq z\leqq 15$ のとき $K(z)=z$, $16\leqq z\leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 個である確率を $P_m(x)$ とする。

たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ。

(1) $m\geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3) n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。

[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{4}$]

O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1) $\mathrm{P}_i\ (i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ $\mathrm{H}_i\ (i=1,\ 2)$ とする。このとき，$\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1$ と $\triangle\mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$ の面積は等しいことを示せ。

(2) $x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1\leqq x\leqq x_2$ の範囲にある部分と線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{O}$, $\mathrm{P}_2\mathrm{O}$ とで囲まれる図形の面積を y_1, y_2 を用いて表せ。

[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{5}$]

C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P, Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。

P, Q, R の速さはそれぞれ $m, 1, 2$ であるとする。（したがって，Q は C をちょうど一周する。）

ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

[東京大学 2010 年前期 理科 $\boxed{6}$]

四面体OABCにおいて，4 つの面はすべて合同であり，$\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=\sqrt{7}$, $\mathrm{AB}=2$ であるとする。また，3 点O, A, Bを含む平面をLとする。

(1) 点Cから平面Lにおろした垂線の足をHとおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ。

(2) $0<t<1$をみたす実数tに対して，線分OA, OB各々を$t:1-t$に内分する点をそれぞれP_t, Q_tとおく。2 点P_t, Q_tを通り，平面Lに垂直な平面をMとするとき，平面Mによる四面体OABCの切り口の面積$S(t)$を求めよ。

(3) tが$0<t<1$の範囲を動くとき，$S(t)$の最大値を求めよ。