[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{1}$]

O を原点とする座標平面上に点 A(−3, 0) をとり， $0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件(ｉ)，(ⅱ)をみたす点 B, C を考える。

(ｉ) B は $y>0$ の部分にあり， $\mathrm{OB}=2$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=180^\circ-\theta$ である。

(ⅱ) C は $y<0$ の部分にあり，$\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$ である。ただし△ABC は O を含むものとする。

以下の問(1)，(2)に答えよ。

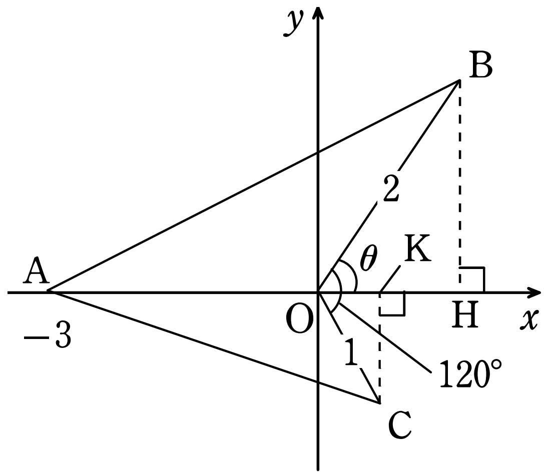
(1) △OAB と△OAC の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2) θ を $0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲で動かすとき，△OAB と△OAC の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

(1) 図より $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{BH}$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin\theta$$

$$=3\sin\theta \quad \cdots①$$



$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{CK}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sin(120^\circ-\theta)$$

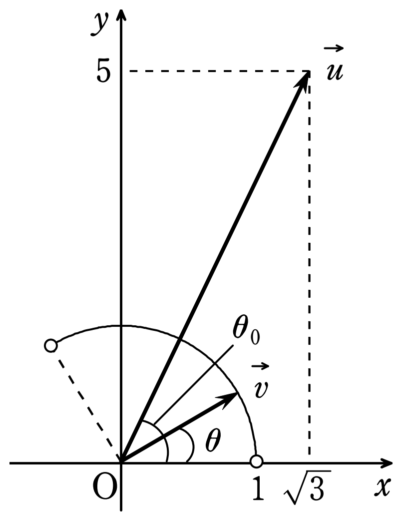
$$=\frac{3}{4}\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right) \quad \cdots②$$

①＝②より $2\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$ から $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ よって $\theta=30^\circ$

(2) $①+②=\dfrac{3}{4}\left(\sqrt{3}\cos\theta+5\sin\theta\right) \quad \cdots③$

$\vec{u}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ とおくと $\sqrt{3}\cos\theta+5\sin\theta=\vec{u}\cdot\vec{v}$ であり，

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ向きのとき最大値 $|\vec{u}||\vec{v}|=2\sqrt{7}$ をとる。



よって ③の最大値は $\dfrac{3}{4}\cdot 2\sqrt{7}=\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$ であり，

このときθは図のθ_0で，$\sin\theta=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$ となる。

[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{2}$]

2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して $f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式になるような定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

$$f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b$$

$$=x^2+(a+2)x+a+b+1 \quad \cdots①$$

$$c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt=c\int_0^1(3x^2+4xt)(2t+a)\,dt$$

$$=3cx^2\int_0^1(2t+a)dt+cx\int_0^1(8t^2+4at)dt$$

$$=3cx^2(1+a)+cx\left(\frac{8}{3}+2a\right)$$

$$=3c(1+a)x^2+c\left(\frac{8}{3}+2a\right)x$$

これと①の係数を比較して

$$1=3c(1+a) \quad \cdots②$$

$$a+2=c\left(\frac{8}{3}+2a\right) \quad \cdots③$$

$$a+b+1=0 \quad \cdots④$$

②より $c=\dfrac{1}{3(1+a)}$ で，これを③に代入して $a+2=\dfrac{1}{3(1+a)}\left(\dfrac{8}{3}+2a\right)$

$$\Leftrightarrow\ 9(a+2)(1+a)=8+6a$$

$$\Leftrightarrow\ 9a^2+21a+10=0$$

$$\Leftrightarrow\ (3a+2)(3a+5)=0$$

$$\Leftrightarrow\ a=-\frac{2}{3},\ -\frac{5}{3}$$

これと②，③より求める定数 $a,\ b,\ c$ の値は $(a,\ b,\ c)=\left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ 1\right),\ \left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{3}$]

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。

L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作 (♯) を繰り返す。

(♯) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，

$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z,\ 16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 個である確率を $P_m(x)$ とする。

たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ。

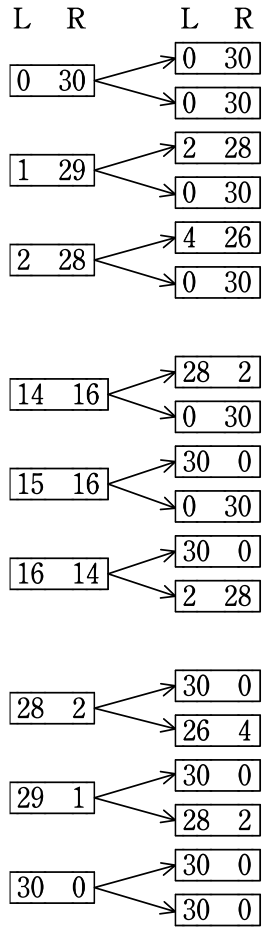
(1) $m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

---

(1) 操作 1 回でボールの個数は次の図のように変わる

（↗，↘ それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$）。



L が m 回後に 30 個になるのは，

（i）$x \leqq 15$ のとき

1 回目に表が出て $2x$ 個になり，残り $m-1$ 回で 30 個になる場合だから

$$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$$

（ii）$x \geqq 15$ のとき

1 回目に表が出て 30 個になるか，

1 回目に表が出て $x-(30-x)=2x-30$ 個になり，

残り $m-1$ 回で 30 個になる場合で，

$$P_m(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)$$

（2）$P_{2n}(10)=\dfrac{1}{2}P_{2n-1}(20)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{2n-2}(10)\right\}$$

よって　$P_{2n}(10)=\dfrac{1}{4}P_{2n-2}(10)+\dfrac{1}{4}$　…①

①は　$P_{2n}(10)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left\{P_{2n-2}(10)-\dfrac{1}{3}\right\}$　と変形でき，$P_0(10)=0$　より

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\left\{P_0(10)-\frac{1}{3}\right\}$$

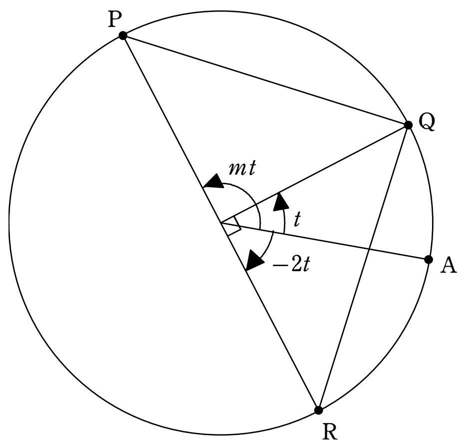
$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{4}$]

C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P, Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。

P, Q, R の速さはそれぞれ $m, 1, 2$ であるとする。（したがって，Q は C をちょうど一周する。）

ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。



時刻 t までの回転角は，P：mt，Q：t，R：$-2t$ であるから

題意の直角二等辺三角形になるための条件は

$$mt-(-2t)=(2k+1)\pi \quad \cdots①, \qquad t-(-2t)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \cdots②$$

となる整数 k, n が存在することである。

②より $t=\dfrac{2n+1}{6}\pi$ $\cdots③$　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ より $0 \leqq n \leqq 5$

①より $(m+2)t=(2k+1)\pi$ であるから，③を代入して $(m+2)\cdot\dfrac{2n+1}{6}\pi=(2k+1)\pi$

$$\Leftrightarrow \quad (m+2)(2n+1)=6(2k+1) \quad \cdots④$$

$2k+1$ は奇数であるから，④の右辺は 4 の倍数でない偶数。

さらに $2n+1$ が奇数であることから，$m+2$ は 4 の倍数でない偶数であり，

$1 \leqq m \leqq 10$ より $m=4, 8$

（ⅰ）$m=4$ のとき

④より $n=k$ となり，n は $0 \leqq n \leqq 5$ の整数。

（ⅱ）$m=8$ のとき

④より $5(2n+1)=3(2k+1)$ となり，$2n+1$ は 3 の倍数であるから $n=1, 4$

（$n=1$ のとき $k=2$，$n=4$ のとき $k=7$ で k は整数）

よって

$$(m,\ t)=\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right), \left(4,\ \frac{\pi}{2}\right), \left(4,\ \frac{5}{6}\pi\right), \left(4,\ \frac{7}{6}\pi\right), \left(4,\ \frac{3}{2}\pi\right), \left(4,\ \frac{11}{6}\pi\right), \left(8,\ \frac{\pi}{2}\right), \left(8,\ \frac{3}{2}\pi\right)$$