[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{2}$]

2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して $f(x+1)=c\int_0^1 (3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式になるような定数 a, b, c の値を求めよ。

$$f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b$$

$$=x^2+(a+2)x+a+b+1 \quad \cdots①$$

$$c\int_0^1 (3x^2+4xt)f'(t)\,dt=c\int_0^1 (3x^2+4xt)(2t+a)\,dt$$

$$=3cx^2\int_0^1 (2t+a)dt+cx\int_0^1 (8t^2+4at)dt$$

$$=3cx^2(1+a)+cx\left(\frac{8}{3}+2a\right)$$

$$=3c(1+a)x^2+c\left(\frac{8}{3}+2a\right)x$$

これと①の係数を比較して

$$1=3c(1+a) \quad \cdots②$$

$$a+2=c\left(\frac{8}{3}+2a\right) \quad \cdots③$$

$$a+b+1=0 \quad \cdots④$$

②より $c=\dfrac{1}{3(1+a)}$ で，これを③に代入して $a+2=\dfrac{1}{3(1+a)}\left(\dfrac{8}{3}+2a\right)$

$$\Leftrightarrow\ 9(a+2)(1+a)=8+6a$$

$$\Leftrightarrow\ 9a^2+21a+10=0$$

$$\Leftrightarrow\ (3a+2)(3a+5)=0$$

$$\Leftrightarrow\ a=-\frac{2}{3},\ -\frac{5}{3}$$

これと②，③より求める定数 a, b, c の値は $(a, b, c)=\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, 1\right), \left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2}\right)$