[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{1}$]

O を原点とする座標平面上に点 A$(-3, 0)$ をとり，$0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件(ｉ)，(ⅱ)をみたす点 B, C を考える。

(ｉ) B は $y>0$ の部分にあり，$\mathrm{OB}=2$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=180^\circ-\theta$ である。

(ⅱ) C は $y<0$ の部分にあり，$\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$ である。ただし $\triangle\mathrm{ABC}$ は O を含むものとする。

以下の問(1)，(2)に答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

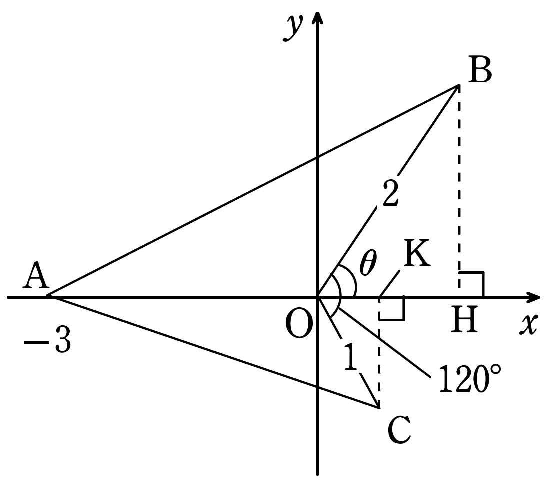
(2) θ を $0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲で動かすとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

---

(1) 図より $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{BH}$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin\theta$$

$$=3\sin\theta \quad \cdots①$$

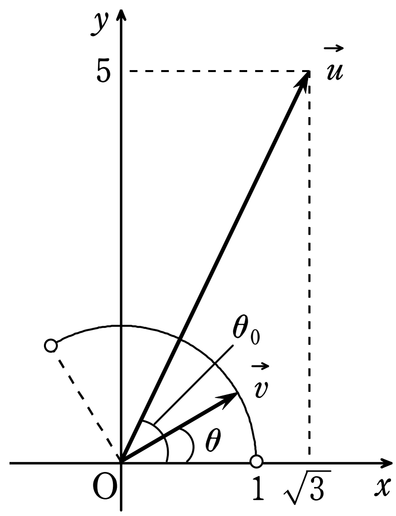


$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{CK}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sin(120^\circ-\theta)$$

$$=\frac{3}{4}\left(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\right) \quad \cdots②$$

①＝②より $2\sin\theta=\sqrt{3}\cos\theta$ から $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ よって $\theta=30^\circ$



(2) ①＋②$=\dfrac{3}{4}\left(\sqrt{3}\cos\theta+5\sin\theta\right) \quad \cdots③$

$\vec{u}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ とおくと $\sqrt{3}\cos\theta+5\sin\theta=\vec{u}\cdot\vec{v}$ であり，

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ向きのとき最大値 $|\vec{u}||\vec{v}|=2\sqrt{7}$ をとる。

よって ③の最大値は $\dfrac{3}{4}\cdot 2\sqrt{7}=\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$ であり，

このときθは図のθ_0で， $\sin\theta=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$ となる。