[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{1}$]

★―――――――――――――――――――――――――――――――★

O を原点とする座標平面上に点 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$ をとり，$0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件(ｉ)，(ⅱ)をみたす点 $\mathrm{B},\ \mathrm{C}$ を考える。

(ｉ) B は $y > 0$ の部分にあり，$\mathrm{OB} = 2$ かつ $\angle\mathrm{AOB} = 180^\circ - \theta$ である。

(ⅱ) C は $y < 0$ の部分にあり，$\mathrm{OC} = 1$ かつ $\angle\mathrm{BOC} = 120^\circ$ である。ただし $\triangle\mathrm{ABC}$ は O を含むものとする。

以下の問(1)，(2)に答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2) θ を $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で動かすとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

★―――――――――――――――――――――――――――――――★

[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{2}$]

2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して $f(x+1)=c\int_0^1 (3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式になるような定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{3}$]

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。

L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作 (♯) を繰り返す。

(♯) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，

$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$, $16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 個である確率を $P_m(x)$ とする。

たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ。

(1) $m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

[東京大学 2010 年前期 文科 $\boxed{4}$]

C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P, Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。

P, Q, R の速さはそれぞれ $m, 1, 2$ であるとする。（したがって，Q は C をちょうど一周する。）

ただし，m は $1 \leqq m \leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。