[東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{1}$]

自然数$m \geqq 2$に対し，$m-1$個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数をd_mとする。すなわちd_mはこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) mが素数ならば，$d_m = m$であることを示せ。

(2) すべての自然数kに対し，$k^m - k$がd_mで割り切れることを，kに関する帰納法によって示せ。

(3) mが偶数のときd_mは 1 または 2 であることであることを示せ。

(1) ${}_m\mathrm{C}_1 = m$ であるから ${}_m\mathrm{C}_i$（$i = 1, 2, \cdots, m-1$）がmの倍数になることを示せばよい。 …①

$${}_m\mathrm{C}_i = \frac{m(m-1)\cdots\cdots\{m-(i-1)\}}{i(i-1)\cdots\cdots 1} \quad \cdots②$$

$i \leqq m-1$ より mが素数ならば mと$i, i-1, \cdots, 1$は互いに素であるから

②は $\dfrac{(m-1)\cdots\cdots\{m-(i-1)\}}{i(i-1)\cdots\cdots 1}$ が約分されて整数となり，mの倍数となる。

(2) $k = 1$のとき，$k^m - k = 0$はd_mの倍数である。

$k = n$のとき，題意が成り立つとすると $n^m - n$ はd_mの倍数 …③

ここで，$k = n+1$のとき

$$\begin{aligned}(n+1)^m - (n+1) &= \sum_{j=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_j n^j - (n+1) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_j n^j + n^m - (n+1) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_j n^j + n^m - n \quad \cdots④\end{aligned}$$

${}_m\mathrm{C}_j$（$1 \leqq j \leqq m-1$）はd_mの倍数で，これと③より，④はd_mの倍数であるから

$k = n+1$のときも成り立つ。

よって題意は示された。

(3) 以下，$\equiv$ は $\mathrm{mod}\, d_m$ とする。

(2)より $k^m - k \equiv 0$（$k=0$ でも成立）であるから

$k = d_m - 1$ として $(d_m - 1)^m - (d_m - 1) \equiv 0$

よって $(-1)^m + 1 \equiv 0$

m は偶数だから $2 \equiv 0$ となり，2 は d_m の倍数である。

よって，d_m は 1 または 2 である。

[東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{2}$]

実数を成分にもつ行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 $r,\ s$ が下の条件(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)をみたすとする。

(ⅰ) $s>1$

(ⅱ) $A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(ⅲ) $A^n\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=0$

このとき以下の問に答えよ。

(1) $B=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を $a,\ c,\ r,\ s$ を用いて表せ。

(2) $B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき, $\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty} w_n=0$ を 示せ。

(3) $c=0$ かつ $|a|<1$ を示せ。

(1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sr \\ s \end{pmatrix}$ より $A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$

よって $B=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-cr & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$

(2) $P=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $B=P^{-1}AP$ と表せて

$$B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=P^{-1}A^nP\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A^n\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n-ry_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$n\to\infty$ のとき $x_n\to 0,\ y_n\to 0$ であるから $z_n\to 0,\ w_n\to 0$ となる。

(3) $a-cr=p$ …① とおくと $B=\begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$ であるから

$$B^2=\begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ c(p+s) & s^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ c(p+s) & s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^3 & 0 \\ c(p^2+ps+s^2) & s^3 \end{pmatrix}$$

となるので，

$$B^n=\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ c(p^{n-1}+p^{n-2}s+\cdots+s^{n-1}) & s^n \end{pmatrix}$$ …② と予想できる。

$n=k$ のとき②が成り立つとすると

$$B^{k+1}=\begin{pmatrix} p^k & 0 \\ c(p^{k-1}+p^{k-2}s+\cdots+s^{k-1}) & s^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^{k+1} & 0 \\ c(p^k+p^{k-1}s+\cdots+s^k) & s^{k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$$

より $n=k+1$ のときも②が成立する。

よって帰納的に②は成り立つ。

したがって $\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^n \\ c(p^{n-1}+p^{n-2}s+\cdots+s^{n-1}) \end{pmatrix}$

(2)から，$n\to\infty$ のとき $p^n\to 0$ …③

したがって $|p|<1$ …④ であり，$s>1$ …⑤ であるから $p\neq s$

よって $w_n=c\cdot\dfrac{p^n-s^n}{p-s}$

③，⑤より $n\to\infty$ のとき $p^n-s^n\to-\infty$ であり，$w_n\to 0$ であるから $c=0$

よって，①より $a=p$ であるから，④より $|a|<1$

[東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{3}$]

スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A) 1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B) 1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C) 1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあれば，その玉を R に入れる。

(1) L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回おこない，さらに操作(B)を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回おこなう。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\dfrac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

(1) L に 4 色揃うのは，

赤，青，黄，白のうちの 1 色が 2 回，他が各 1 回 …①

出るときである。

どの色が 2 回出るかで 4 通りあり，2 回出る 1 つの色を決めると

$\dfrac{5!}{2!}=5\cdot4\cdot3$ 通りある。

よって，L に 4 色揃う確率は $\dfrac{4\times5\cdot4\cdot3}{4^5}=\dfrac{15}{64}$ …②

R に 4 色揃う確率も同様に $P_1=②^2=\dfrac{225}{4096}$

(2) L に 4 色揃うのは①の場合で $P_2=②=\dfrac{15}{64}$

(3) L も R も 4 色揃うのは各色が 2 回以上出る場合で，出る回数は次の 2 種類ある。

（ｉ）2 回，2 回，2 回，4 回

（ⅱ）2 回，2 回，3 回，3 回

（ｉ)のとき

どの色が 4 回かで 4 通りあり，ある 1 つの色を決めると

他の 3 色の出方は ${}_{10}\mathrm{C}_2\cdot{}_8\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_2=45\cdot28\cdot15$ 通りある。

（ⅱ)のとき

どの色が 2 回かで ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りあり，ある 2 つの色を決めると

他の 2 色の出方は ${}_{10}\mathrm{C}_2\cdot{}_8\mathrm{C}_2\cdot{}_6\mathrm{C}_3=45\cdot28\cdot20$ 通りある。

よって $P_3=\dfrac{4\times45\cdot28\cdot15+6\times45\cdot28\cdot20}{4^{10}}$

また，$P_1=\dfrac{(4\times5\cdot4\cdot3)^2}{4^{10}}$ であるから

$$\frac{P_3}{P_1}=\frac{4\times45\cdot28\cdot15+6\times45\cdot28\cdot20}{4\cdot5\cdot4\cdot3\times4\cdot5\cdot4\cdot3}=\frac{7\cdot3+6\cdot7}{4\cdot4}=\frac{63}{16}$$

［ 東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{4}$ ］

a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板 $D_1=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2\leqq 1,\ z=a\}$，

$$D_2=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2\leqq 1,\ z=-a\}$$

を考える。D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分と x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x\geqq 0\}$ との共通部分を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\lim\limits_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。

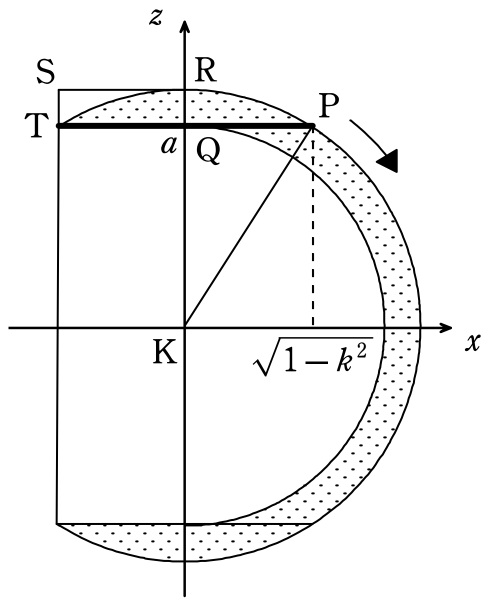
---

(1) 平面 $y=k\ \ (-1\leqq k\leqq 1)$ を α_k とおく。

α_k による D_1 の切り口は $x^2+k^2\leqq 1,\ z=a$ であり，図の太線部分。

これを 180° 回転させて，α_k による E の切り口は図の打点部分。

図のように記号をおくと，



$x\geqq 0$ の面積は $\dfrac{\pi}{2}\left(\mathrm{KP}^2-\mathrm{KQ}^2\right)=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{PQ}^2$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-k^2\right)$$

よって $W(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}\left(1-k^2\right)dk$

$$=\pi\int_0^1\left(1-k^2\right)dk$$

$$=\frac{2}{3}\pi$$

(2) E の $x\leqq 0$ の部分の体積を $U(a)$，上図の打点部分の $x\leqq 0$ の部分の面積を $S(k)$ とおく。

$S(k)\leqq 2\cdot$長方形 $\mathrm{TQRS}=2\mathrm{TQ}\left(\mathrm{KR}-\mathrm{KQ}\right)$

$$=2\mathrm{TQ}\left(\mathrm{KP}-\mathrm{KQ}\right)$$

$$= 2\sqrt{1-k^2}\left(\sqrt{1-k^2+a^2}-a\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{1-k^2}\left(1-k^2\right)}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}$$

$$= \frac{2\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}$$

$$\leqq \frac{2\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a}$$

$$= \frac{2}{a}\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

したがって

$$0 < U(a) = \int_{-1}^{1} S(k)\,dk \leqq \frac{2}{a}\int_{-1}^{1}\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}} dk \quad \cdots①$$

$a \to \infty$ のとき①の最右辺$\to 0$であるから，はさみうちの原理より $U(a) \to 0$

よって $V(a) \to W(a) = \dfrac{2}{3}\pi$

［ 東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{5}$ ］

★―――――――――――――――――――――――――――――――――――★

(1) 実数 x が $-1<x<1,\ x\neq 0$ をみたすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

★―――――――――――――――――――――――――――――――――――★

(1) $-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき $(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$ …① を示す。

① $\Leftrightarrow$ $\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\Leftrightarrow$ $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\log(1-x)<\dfrac{1}{x}\log(1+x)$

$\Leftrightarrow$ $-1<x<0$ のとき $(x-1)\log(1-x)>\log(1+x)$

$0<x<1$ のとき $(x-1)\log(1-x)<\log(1+x)$ …①´

$f(x)=\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)-(x-1)\cdot\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)+1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2}$$

x	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	$(+1)$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	0	↗	

よって $f'(x)\geqq 0$（等号は $x=0$ のみで成立）

さらに $f(0)=0$ なので $-1<x<0$ のとき $f(x)<0$

$0<x<1$ のとき $f(x)>0$

したがって，①´ が示されたので，①も示された。

(2) ①の両辺に $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ をかけると

$$(1-x)^1<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow (1-x)^1<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$x=0.01$ を代入して $0.99<0.9999^{100}$ を得る。

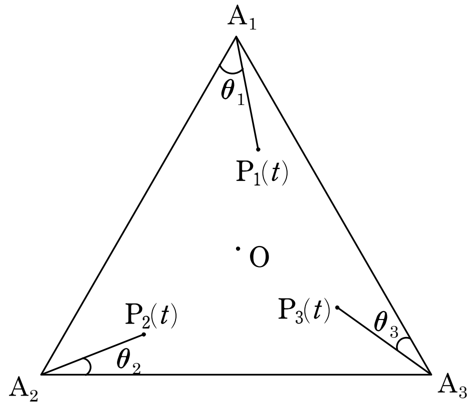
さらに，①の両辺に $(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$ をかけると

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}+\left(1-\frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow (1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}<1+x$$

$x=-0.01$ を代入して $0.9999^{101}<0.99$ を得る。

[東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{6}$]

平面上の 2 点 $\mathrm{P, Q}$ の距離を $d(\mathrm{P, Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$ がある。$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$ の内部に 3 点 $\mathrm{B_1, B_2, B_3}$ を，$d(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n) = 1$ $(n = 1, 2, 3)$ となるようにとる。また，



$$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}},\ \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}},\ \overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}$$

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}},\ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}},\ \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$$

とおく。$n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発し，$\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1) ある時刻 t で $d(\mathrm{P_1}(t), \mathrm{P_2}(t)) \leqq 1$ が成立した。ベクトル $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ とベクトル $\overrightarrow{a_1}$ のなす角度を θ とおく。このとき $|\sin\theta| \leqq \dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2) 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を $\theta_1 = \angle \mathrm{B_1A_1A_2}$, $\theta_2 = \angle \mathrm{B_2A_2A_3}$, $\theta_3 = \angle \mathrm{B_3A_3A_1}$ によって定義する。α を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha = \dfrac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで，$\theta_1 + \theta_2$ のとる範囲を α を用いて表せ。

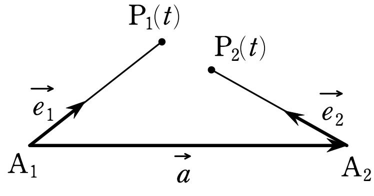
(3) 時刻 t_1, t_2, t_3 のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P_2}(t_1), \mathrm{P_3}(t_1)) \leqq 1\ ,\ d(\mathrm{P_3}(t_2), \mathrm{P_1}(t_2)) \leqq 1\ ,\ d(\mathrm{P_1}(t_3), \mathrm{P_2}(t_3)) \leqq 1$$

このとき，時刻 $T = \dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に $d(\mathrm{P_1}(T), \mathrm{O}) \leqq 3$, $d(\mathrm{P_2}(T), \mathrm{O}) \leqq 3$, $d(\mathrm{P_3}(T), \mathrm{O}) \leqq 3$ が成立することを示せ。

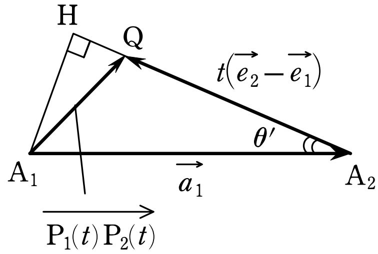
---

(1) $\overrightarrow{\mathrm{A_1P_1}(t)} = t\overrightarrow{e_1}$， $\overrightarrow{\mathrm{A_1P_2}(t)} = \overrightarrow{a_1} + t\overrightarrow{e_2}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{P_1}(t)\mathrm{P_2}(t)} = \overrightarrow{a_1} + t\left(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}\right)$$

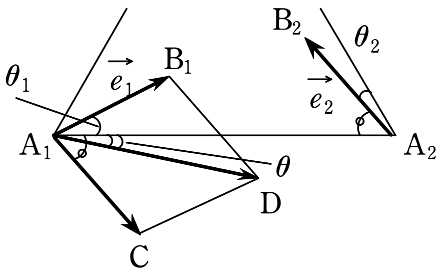
よって図のようになるので，θ は $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QA_2}}$ のなす角，つまり図の θ' となる。



$P_1(t)P_2(t) \leqq 1$ のとき $A_1H \leqq A_1Q = P_1(t)P_2(t) \leqq 1$ であるから

$|\sin\theta| = \sin\theta' = \dfrac{A_1H}{A_1A_2} \leqq \dfrac{1}{1000}$

(2) $\overrightarrow{A_1C} = -\vec{e_2}$ となる点C，A_1CDB_1 がひし形となる点Dをとると，



$\vec{e_1} - \vec{e_2} = \overrightarrow{A_1D}$ であるから $\theta = \angle A_2A_1D$

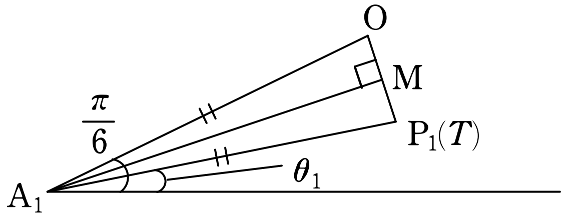
$\angle A_2A_1C = \angle A_1A_2B_2 = \dfrac{\pi}{3} - \theta_2$

よって $\angle B_1A_1D = \dfrac{1}{2}\angle B_1A_1C = \dfrac{1}{2}\left\{\theta_1 + \left(\dfrac{\pi}{3} - \theta_2\right)\right\} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}$

したがって $\theta = \angle A_2A_1D = |\angle B_1A_1D - \angle B_1A_1A_2| = \left|\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) - \theta_1\right| = \left|\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right|$

(1) より $\theta \leqq \alpha$ であるから $-\alpha \leqq \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2} \leqq \alpha \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq \theta_1 + \theta_2 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ …①

(3) $OA_1 = \dfrac{1000}{\sqrt{3}} = A_1P_1(T)$ より $OP_1(T)$ の中点をMとおくと



$OP_1(T) = 2OM = 2 \cdot \dfrac{1000}{\sqrt{3}} \sin\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\pi}{6} - \theta_1\right|$ …②

①と同様に $\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq \theta_2 + \theta_3 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ …③

$\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq \theta_3 + \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ …④

①＋④より $\dfrac{2}{3}\pi - 4\alpha \leqq 2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leqq \dfrac{2}{3}\pi + 4\alpha$ …⑤

③×(−1) より $-\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq -(\theta_2 + \theta_3) \leqq -\dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ …⑥

⑤＋⑥より $\dfrac{\pi}{3} - 6\alpha \leqq 2\theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 6\alpha$

よって $-3\alpha \leqq \dfrac{\pi}{6} - \theta_1 \leqq 3\alpha$ となるので ② $\leqq 2 \cdot \dfrac{1000}{\sqrt{3}} \sin\dfrac{3}{2}\alpha$ …⑦

ここで，$0 \leqq \dfrac{3}{2}\alpha \leqq 2\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$\sin\dfrac{3}{2}\alpha \leqq \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \leqq 2\sin\alpha = 2 \cdot \dfrac{1}{1000}$

よって ⑦ $\leqq 2 \cdot \dfrac{1000}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{1000} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \leqq 3$ となる。同様に $OP_2(T) \leqq 3$, $OP_3(T) \leqq 3$ が成り立つ。