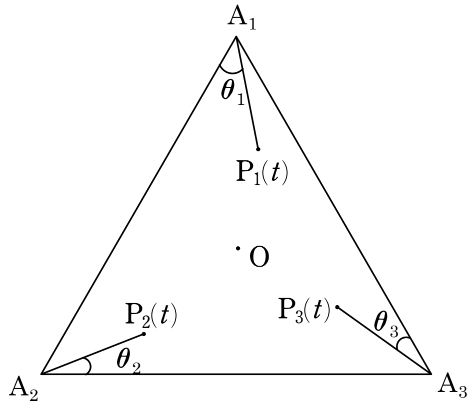
[東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{6}$]

平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ がある。$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の内部に 3 点 B_1, B_2, B_3 を，$d(\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n) = 1$ $(n = 1, 2, 3)$ となるようにとる。また，



$\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$, $\overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$, $\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1}$

$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3}$

とおく。$n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発し，$\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1) ある時刻 t で $d(\mathrm{P}_1(t), \mathrm{P}_2(t)) \leqq 1$ が成立した。ベクトル $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ とベクトル $\overrightarrow{a_1}$ のなす角度を θ とおく。このとき $|\sin\theta| \leqq \dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2) 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を $\theta_1 = \angle \mathrm{B}_1\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$, $\theta_2 = \angle \mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$, $\theta_3 = \angle \mathrm{B}_3\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1$ によって定義する。α を $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha = \dfrac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで，$\theta_1 + \theta_2$ のとる範囲を α を用いて表せ。

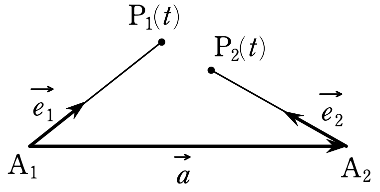
(3) 時刻 t_1, t_2, t_3 のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P}_2(t_1), \mathrm{P}_3(t_1)) \leqq 1 \text{ , } d(\mathrm{P}_3(t_2), \mathrm{P}_1(t_2)) \leqq 1 \text{ , } d(\mathrm{P}_1(t_3), \mathrm{P}_2(t_3)) \leqq 1$$

このとき，時刻 $T = \dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に $d(\mathrm{P}_1(T), \mathrm{O}) \leqq 3$, $d(\mathrm{P}_2(T), \mathrm{O}) \leqq 3$, $d(\mathrm{P}_3(T), \mathrm{O}) \leqq 3$ が成立することを示せ。

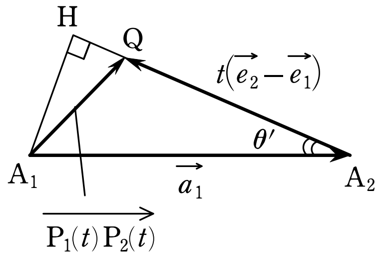
---

(1) $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}_1(t)} = t\overrightarrow{e_1}$， $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{P}_2(t)} = \overrightarrow{a_1} + t\overrightarrow{e_2}$ より



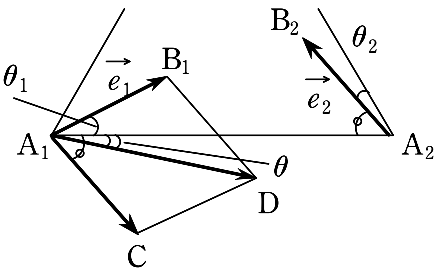
$\overrightarrow{\mathrm{P}_1(t)\mathrm{P}_2(t)} = \overrightarrow{a_1} + t\left(\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1}\right)$

よって図のようになるので，θ は $\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QA}_2}$ のなす角，つまり図の θ' となる。



$P_1(t)P_2(t) \leqq 1$ のとき $A_1H \leqq A_1Q = P_1(t)P_2(t) \leqq 1$ であるから

$$|\sin\theta| = \sin\theta' = \frac{A_1H}{A_1A_2} \leqq \frac{1}{1000}$$



(2) $\overrightarrow{A_1C} = -\vec{e_2}$ となる点C，A_1CDB_1 がひし形となる点Dをとると，

$\vec{e_1} - \vec{e_2} = \overrightarrow{A_1D}$ であるから $\theta = \angle A_2A_1D$

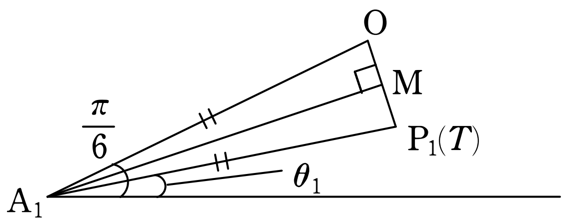
$$\angle A_2A_1C = \angle A_1A_2B_2 = \frac{\pi}{3} - \theta_2$$

よって $\angle B_1A_1D = \dfrac{1}{2}\angle B_1A_1C = \dfrac{1}{2}\left\{\theta_1 + \left(\dfrac{\pi}{3} - \theta_2\right)\right\} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}$

したがって $\theta = \angle A_2A_1D = |\angle B_1A_1D - \angle B_1A_1A_2| = \left|\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) - \theta_1\right| = \left|\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right|$

(1) より $\theta \leqq \alpha$ であるから $-\alpha \leqq \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2} \leqq \alpha \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq \theta_1 + \theta_2 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ …①

(3) $OA_1 = \dfrac{1000}{\sqrt{3}} = A_1P_1(T)$ より $OP_1(T)$ の中点をMとおくと



$OP_1(T) = 2OM = 2\cdot\dfrac{1000}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\pi}{6} - \theta_1\right|$ …②

①と同様に $\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq \theta_2 + \theta_3 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ …③

$\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq \theta_3 + \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ …④

①＋④より $\dfrac{2}{3}\pi - 4\alpha \leqq 2\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \leqq \dfrac{2}{3}\pi + 4\alpha$ …⑤

③×(−1) より $-\dfrac{\pi}{3} - 2\alpha \leqq -(\theta_2 + \theta_3) \leqq -\dfrac{\pi}{3} + 2\alpha$ …⑥

⑤＋⑥より $\dfrac{\pi}{3} - 6\alpha \leqq 2\theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{3} + 6\alpha$

よって $-3\alpha \leqq \dfrac{\pi}{6} - \theta_1 \leqq 3\alpha$ となるので ② $\leqq 2\cdot\dfrac{1000}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{3}{2}\alpha$ …⑦

ここで，$0 \leqq \dfrac{3}{2}\alpha \leqq 2\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\sin\frac{3}{2}\alpha \leqq \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \leqq 2\sin\alpha = 2\cdot\frac{1}{1000}$$

よって ⑦ $\leqq 2\cdot\dfrac{1000}{\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{1000} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \leqq 3$ となる。同様に $OP_2(T) \leqq 3$, $OP_3(T) \leqq 3$ が成り立つ。