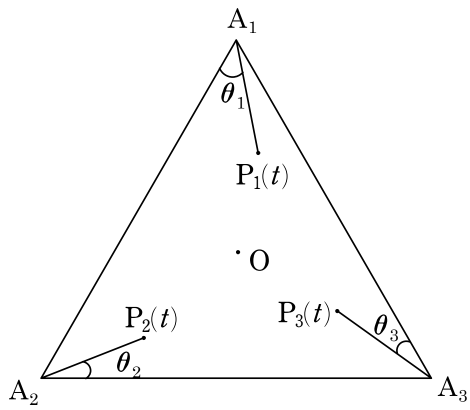
[東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{6}$]

平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle\mathrm{A_1A_2A_3}$ がある。$\triangle\mathrm{A_1A_2A_3}$ の内部に 3 点 $\mathrm{B_1},\ \mathrm{B_2},\ \mathrm{B_3}$ を，$d(\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n)=1\ (n=1,\ 2,\ 3)$ となるようにとる。また，

$$\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}},\ \overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}},\ \overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}$$

$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}},\ \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$$

とおく。$n=1,\ 2,\ 3$ のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発し，$\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。



(1) ある時刻 t で $d(\mathrm{P_1}(t),\ \mathrm{P_2}(t))\leqq 1$ が成立した。ベクトル $\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ とベクトル $\overrightarrow{a_1}$ のなす角度を θ とおく。このとき $|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2) 角度 $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ を $\theta_1=\angle\mathrm{B_1A_1A_2}$, $\theta_2=\angle\mathrm{B_2A_2A_3}$, $\theta_3=\angle\mathrm{B_3A_3A_1}$ によって定義する。α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで，$\theta_1+\theta_2$ のとる範囲を α を用いて表せ。

(3) 時刻 $t_1,\ t_2,\ t_3$ のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P_2}(t_1),\ \mathrm{P_3}(t_1))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_3}(t_2),\ \mathrm{P_1}(t_2))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_1}(t_3),\ \mathrm{P_2}(t_3))\leqq 1$$

このとき，時刻 $T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に $d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$, $d(\mathrm{P_2}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$, $d(\mathrm{P_3}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$ が成立することを示せ。