[ 東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{5}$ ]

(1) 実数 $x$ が $-1<x<1,\ x\neq 0$ をみたすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

(1) $-1<x<1$， $x\neq 0$ のとき $(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$ …① を示す。

① $\Leftrightarrow$ $\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\Leftrightarrow$ $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\log(1-x)<\dfrac{1}{x}\log(1+x)$

$\Leftrightarrow$ $-1<x<0$ のとき $(x-1)\log(1-x)>\log(1+x)$

$0<x<1$ のとき $(x-1)\log(1-x)<\log(1+x)$ …①´

$f(x)=\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)-(x-1)\cdot\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)+1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2}$$

| $x$ | $(-1)$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $(+1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

よって $f'(x)\geqq 0$（等号は $x=0$ のみで成立）

さらに $f(0)=0$ なので $-1<x<0$ のとき $f(x)<0$

$0<x<1$ のとき $f(x)>0$

したがって，①´が示されたので，①も示された。

（2）①の両辺に $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ をかけると

$$(1-x)^1 < (1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}} \iff (1-x)^1 < (1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$x = 0.01$ を代入して $0.99 < 0.9999^{100}$ を得る。

さらに，①の両辺に $(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$ をかけると

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}+\left(1-\frac{1}{x}\right)} \iff (1-x^2)^{1-\frac{1}{x}} < 1+x$$

$x = -0.01$ を代入して $0.9999^{101} < 0.99$ を得る。