[東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{4}$]

---

a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板 $D_1=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2\leqq 1,\ z=a\}$，

$$D_2=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2\leqq 1,\ z=-a\}$$

を考える。D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分と x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x\geqq 0\}$ との共通部分を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\lim\limits_{a\to\infty} V(a)$ を求めよ。

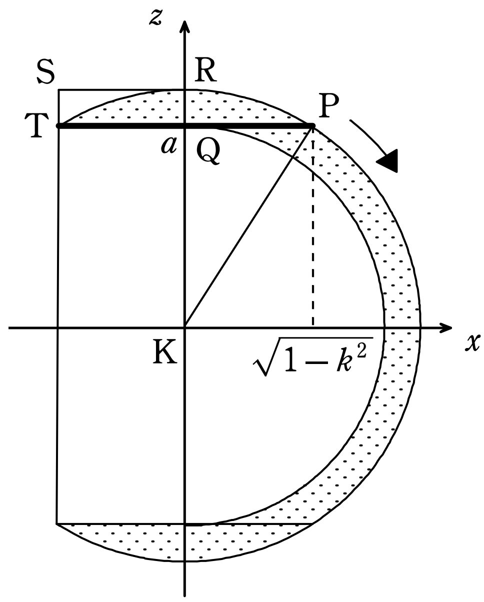
---

(1) 平面 $y=k\quad(-1\leqq k\leqq 1)$ を α_k とおく。

α_k による D_1 の切り口は $x^2+k^2\leqq 1,\ z=a$ であり，図の太線部分。

これを 180° 回転させて，α_k による E の切り口は図の打点部分。

図のように記号をおくと，



$x\geqq 0$ の面積は $\dfrac{\pi}{2}\left(\mathrm{KP}^2-\mathrm{KQ}^2\right)=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{PQ}^2$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-k^2\right)$$

よって $W(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}\left(1-k^2\right)dk$

$$=\pi\int_{0}^{1}\left(1-k^2\right)dk$$

$$=\frac{2}{3}\pi$$

(2) E の $x\leqq 0$ の部分の体積を $U(a)$，上図の打点部分の $x\leqq 0$ の部分の面積を $S(k)$ とおく。

$S(k)\leqq 2\cdot$長方形 $\mathrm{TQRS}=2\mathrm{TQ}\left(\mathrm{KR}-\mathrm{KQ}\right)$

$$=2\mathrm{TQ}\left(\mathrm{KP}-\mathrm{KQ}\right)$$

$$= 2\sqrt{1-k^2}\left(\sqrt{1-k^2+a^2}-a\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{1-k^2}\left(1-k^2\right)}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}$$

$$= \frac{2\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-k^2+a^2}+a}$$

$$\leqq \frac{2\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a}$$

$$= \frac{2}{a}\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

したがって

$$0 < U(a) = \int_{-1}^{1} S(k)\,dk \leqq \frac{2}{a}\int_{-1}^{1}\left(1-k^2\right)^{\frac{3}{2}} dk \quad \cdots ①$$

$a \to \infty$ のとき①の最右辺$\to 0$ であるから，はさみうちの原理より $U(a) \to 0$

よって $V(a) \to W(a) = \dfrac{2}{3}\pi$