

[東京大学 2009 年前期 理科 3]



スイッチを 1 回押すごとに、赤、青、黄、白のいずれかの色の玉が 1 個、等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

- (A) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を L に入れる。
- (B) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を R に入れる。
- (C) 1 回スイッチを押し、出てきた玉と同じ色の玉が、L になければその玉を L に入れ、L にあれば、その玉を R に入れる。

(1) L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回おこない、さらに操作(B)を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回おこなう。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。 $\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。



(1) L に 4 色揃うのは、

赤、青、黄、白のうちの 1 色が 2 回、他が各 1 回 …①

出るときである。

どの色が 2 回出るかで 4 通りあり、2 回出る 1 つの色を決めると

$$\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \text{ 通りある。}$$

よって、L に 4 色揃う確率は $\frac{4 \times 5 \cdot 4 \cdot 3}{4^5} = \frac{15}{64}$ …②

R に 4 色揃う確率も同様に $P_1 = \textcircled{2}^2 = \frac{225}{4096}$

(2) L に 4 色揃うのは①の場合で $P_2 = \textcircled{2} = \frac{15}{64}$

(3) L も R も 4 色揃うのは各色が 2 回以上出る場合で、出る回数は次の 2 種類ある。

(i) 2 回, 2 回, 2 回, 4 回

(ii) 2 回, 2 回, 3 回, 3 回

(i) のとき

どの色が 4 回かで 4 通りあり、ある 1 つの色を決めると

他の 3 色の出方は ${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 = 45 \cdot 28 \cdot 15$ 通りある。

(ii) のとき

どの色が 2 回かで ${}_4C_2 = 6$ 通りあり、ある 2 つの色を決めると

他の 2 色の出方は ${}_{10}C_2 \cdot {}_8C_2 \cdot {}_6C_3 = 45 \cdot 28 \cdot 20$ 通りある。

$$\text{よって } P_3 = \frac{4 \times 45 \cdot 28 \cdot 15 + 6 \times 45 \cdot 28 \cdot 20}{4^{10}}$$

また、 $P_1 = \frac{(4 \times 5 \cdot 4 \cdot 3)^2}{4^{10}}$ であるから

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{4 \times 45 \cdot 28 \cdot 15 + 6 \times 45 \cdot 28 \cdot 20}{4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \times 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 3 + 6 \cdot 7}{4 \cdot 4} = \frac{63}{16}$$