[東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{2}$]

実数を成分にもつ行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数$r,\ s$が下の条件(ｉ),（ⅱ),（ⅲ)をみたすとする。

（ｉ）$s>1$

（ⅱ）$A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

（ⅲ）$A^n\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} y_n=0$

このとき以下の問に答えよ。

(1) $B=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を$a,\ c,\ r,\ s$を用いて表せ。

(2) $B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とするとき，$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty} w_n=0$を 示せ。

(3) $c=0$ かつ $|a|<1$ を示せ。

---

(1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sr \\ s \end{pmatrix}$ より $A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}$

よって $B=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-cr & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$

(2) $P=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $B=P^{-1}AP$ と表せて

$$B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=P^{-1}A^nP\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A^n\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n-ry_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$n\to\infty$ のとき $x_n\to 0,\ y_n\to 0$ であるから $z_n\to 0,\ w_n\to 0$ となる。

(3) $a-cr=p$ …① とおくと $B=\begin{pmatrix} p & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$ であるから

$$B^2=\begin{pmatrix}p & 0\\ c & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 0\\ c & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^2 & 0\\ c(p+s) & s^2\end{pmatrix}$$

$$B^3=\begin{pmatrix}p^2 & 0\\ c(p+s) & s^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 0\\ c & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^3 & 0\\ c(p^2+ps+s^2) & s^3\end{pmatrix}$$

となるので，

$$B^n=\begin{pmatrix}p^n & 0\\ c(p^{n-1}+p^{n-2}s+\cdots+s^{n-1}) & s^n\end{pmatrix}$$ …② と予想できる。

$n=k$ のとき②が成り立つとすると

$$B^{k+1}=\begin{pmatrix}p^k & 0\\ c(p^{k-1}+p^{k-2}s+\cdots+s^{k-1}) & s^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 0\\ c & s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^{k+1} & 0\\ c(p^k+p^{k-1}s+\cdots+s^k) & s^{k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 0\\ c & s\end{pmatrix}$$

より $n=k+1$ のときも②が成立する。

よって帰納的に②は成り立つ。

したがって $\begin{pmatrix}z_n\\ w_n\end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^n\\ c(p^{n-1}+p^{n-2}s+\cdots+s^{n-1})\end{pmatrix}$

(2)から，$n\to\infty$ のとき $p^n\to 0$ …③

したがって $|p|<1$ …④ であり，$s>1$ …⑤ であるから $p\neq s$

よって $w_n=c\cdot\dfrac{p^n-s^n}{p-s}$

③，⑤より $n\to\infty$ のとき $p^n-s^n\to-\infty$ であり，$w_n\to 0$ であるから $c=0$

よって，①より $a=p$ であるから，④より $|a|<1$