[東京大学 2009 年前期 理科 $\boxed{1}$]

自然数$m \geqq 2$に対し，$m-1$個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数をd_mとする。すなわちd_mはこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) mが素数ならば，$d_m = m$であることを示せ。

(2) すべての自然数kに対し，$k^m - k$がd_mで割り切れることを，kに関する帰納法によって示せ。

(3) mが偶数のときd_mは 1 または 2 であることであることを示せ。

(1) ${}_m\mathrm{C}_1 = m$ であるから ${}_m\mathrm{C}_i$（$i = 1, 2, \cdots, m-1$）がmの倍数になることを示せばよい。 …①

$${}_m\mathrm{C}_i = \frac{m(m-1)\cdots\cdots\{m-(i-1)\}}{i(i-1)\cdots\cdots 1} \quad \cdots②$$

$i \leqq m-1$ より mが素数ならば mと$i, i-1, \cdots, 1$は互いに素であるから

②は $\dfrac{(m-1)\cdots\cdots\{m-(i-1)\}}{i(i-1)\cdots\cdots 1}$ が約分されて整数となり，mの倍数となる。

(2) $k = 1$のとき，$k^m - k = 0$はd_mの倍数である。

$k = n$のとき，題意が成り立つとすると $n^m - n$ はd_mの倍数 …③

ここで，$k = n+1$のとき

$$\begin{aligned}(n+1)^m - (n+1) &= \sum_{j=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_j n^j - (n+1) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_j n^j + n^m - (n+1) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_j n^j + n^m - n \quad \cdots④\end{aligned}$$

${}_m\mathrm{C}_j$（$1 \leqq j \leqq m-1$）はd_mの倍数で，これと③より，④はd_mの倍数であるから

$k = n+1$のときも成り立つ。

よって題意は示された。

(3) 以下，$\equiv$ は $\mathrm{mod}\, d_m$ とする。

(2)より $k^m - k \equiv 0$ （$k=0$ でも成立）であるから

$k = d_m - 1$ として $(d_m - 1)^m - (d_m - 1) \equiv 0$

よって $(-1)^m + 1 \equiv 0$

m は偶数だから $2 \equiv 0$ となり，2 は d_m の倍数である。

よって，d_m は 1 または 2 である。