

[東京大学 2009 年前期 理科 1]



自然数 $m \geq 2$ に対し, $m-1$ 個の二項係数 ${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ を考え, これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) m が素数ならば, $d_m = m$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 k に対し, $k^m - k$ が d_m で割り切れることを, k に関する帰納法によって示せ。

(3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることであることを示せ。





実数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r, s が下の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとする。

(i) $s > 1$

(ii) $A \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} (n = 1, 2, \dots)$ とするとき $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

このとき以下の問に答えよ。

(1) $B = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a, c, r, s を用いて表せ。

(2) $B^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix} (n = 1, 2, \dots)$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ を示せ。

(3) $c = 0$ かつ $|a| < 1$ を示せ。



[東京大学 2009 年前期 理科 3]



スイッチを 1 回押すごとに、赤、青、黄、白のいずれかの色の玉が 1 個、等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を L に入れる。

(B) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を R に入れる。

(C) 1 回スイッチを押し、出てきた玉と同じ色の玉が、L になければその玉を L に入れ、L にあれば、その玉を R に入れる。

(1) L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回おこない、さらに操作(B)を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回おこなう。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。 $\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。



[東京大学 2009 年前期 理科 4]



a を正の実数とし、空間内の 2 つの円板 $D_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = a\}$,

$$D_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = -a\}$$

を考える。 D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分と x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。 E の体積を $V(a)$ とし、 E と $\{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$ との共通部分を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。



[東京大学 2009 年前期 理科 5]



(1) 実数 x が $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ をみたすとき, 次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$$



[東京大学 2009 年前期 理科 6]



平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(P, Q)$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする一辺の長さが 1000 の正三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ がある。 $\triangle A_1A_2A_3$ の内部に 3 点 B_1, B_2, B_3 を、

$d(A_n, B_n) = 1$ ($n = 1, 2, 3$) となるようにとる。また、

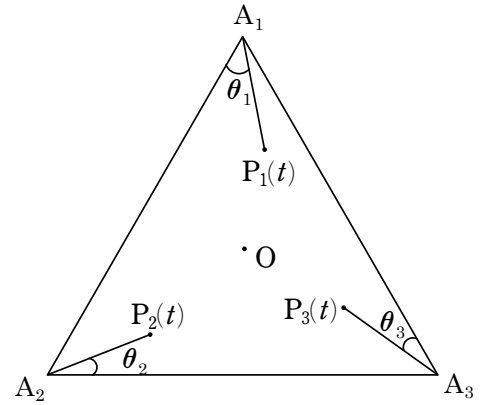
$$\vec{a}_1 = \vec{A_1A_2}, \vec{a}_2 = \vec{A_2A_3}, \vec{a}_3 = \vec{A_3A_1}$$

$$\vec{e}_1 = \vec{A_1B_1}, \vec{e}_2 = \vec{A_2B_2}, \vec{e}_3 = \vec{A_3B_3}$$

とおく。 $n = 1, 2, 3$ のそれぞれに対して、時刻 0 に A_n を出発し、

\vec{e}_n の向きに速さ 1 で直進する点を考え、時刻 t におけるその位置

を $P_n(t)$ と表すことにする。



(1) ある時刻 t で $d(P_1(t), P_2(t)) \leq 1$ が成立した。ベクトル $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ とベクトル \vec{a}_1 のなす角度を θ とお

く。このとき $|\sin \theta| \leq \frac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2) 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を $\theta_1 = \angle B_1A_1A_2, \theta_2 = \angle B_2A_2A_3, \theta_3 = \angle B_3A_3A_1$ によって定義する。 α を

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $\sin \alpha = \frac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで、 $\theta_1 + \theta_2$ のとる範囲を α を用いて表せ。

(3) 時刻 t_1, t_2, t_3 のそれぞれにおいて、次が成立した。

$$d(P_2(t_1), P_3(t_1)) \leq 1, d(P_3(t_2), P_1(t_2)) \leq 1, d(P_1(t_3), P_2(t_3)) \leq 1$$

このとき、時刻 $T = \frac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に $d(P_1(T), O) \leq 3, d(P_2(T), O) \leq 3, d(P_3(T), O) \leq 3$

が成立することを示せ。

