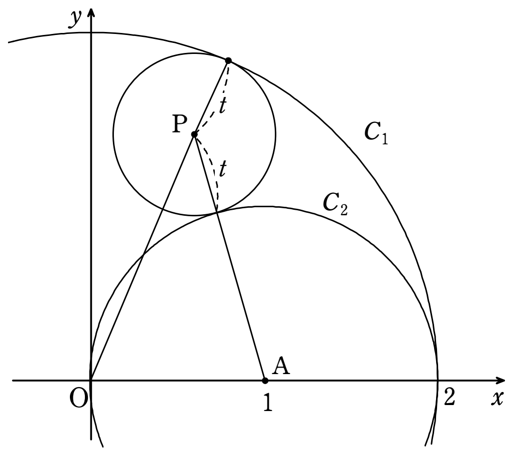
[東京大学 2009 年前期 文科 $\boxed{1}$]

座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし, 点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 t の円 C_3 が， C_1 に内接し，かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし， b は正の実数とする。

(1) $a,\ b$ を t を用いて表せ。また， t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき， b の最大値を求めよ。

(1) O を原点とし， $\mathrm{A}(1,\ 0)$ ， $\mathrm{P}(a,\ b)$ とおく。



$\mathrm{OP}=2-t$ より $t<2$ …①

$a^2+b^2=(2-t)^2$ …②

$\mathrm{AP}=1+t$ より $(a-1)^2+b^2=(1+t)^2$ …③

②，③より $a=2-3t$

②に代入して $b^2=8t-8t^2=8t(1-t)$ …④

これと $b>0$ より $b=2\sqrt{2t(1-t)}$

①と④ >0 より，t の範囲は $0<t<1$

(2) ④ $=-8\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+2$ であるから

b^2 は $t=\dfrac{1}{2}$ のときに最大値 2 をとり，

b の最大値は $\sqrt{2}$

[東京大学 2009 年前期 文科 $\boxed{2}$]

自然数$m \geqq 2$に対し，$m-1$個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数をd_mとする。すなわちd_mはこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) mが素数ならば，$d_m = m$であることを示せ。

(2) すべての自然数kに対し，$k^m - k$がd_mで割り切れることを，kに関する帰納法によって示せ。

---

(1) ${}_m\mathrm{C}_1 = m$ であるから ${}_m\mathrm{C}_i$（$i = 1, 2, \cdots, m-1$）がmの倍数になることを示せばよい。 …①

$${}_m\mathrm{C}_i = \frac{m(m-1)\cdot\cdots\cdot\{m-(i-1)\}}{i(i-1)\cdot\cdots\cdot 1} \quad \cdots ②$$

$i \leqq m-1$ より mが素数ならば mと$i, i-1, \cdots, 1$は互いに素であるから

②は $\dfrac{(m-1)\cdot\cdots\cdot\{m-(i-1)\}}{i(i-1)\cdot\cdots\cdot 1}$ が約分されて整数となり，mの倍数となる。

(2) $k = 1$のとき，$k^m - k = 0$はd_mの倍数である。

$k = n$のとき，題意が成り立つとすると $n^m - n$ はd_mの倍数 …③

ここで，$k = n+1$のとき

$$\begin{aligned}(n+1)^m - (n+1) &= \sum_{j=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_j n^j - (n+1) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_j n^j + n^m - (n+1) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_j n^j + n^m - n \quad \cdots ④\end{aligned}$$

${}_m\mathrm{C}_j$（$1 \leqq j \leqq m-1$）はd_mの倍数で，これと③より，④はd_mの倍数であるから

$k = n+1$のときも成り立つ。

よって題意は示された。

[東京大学 2009 年前期 文科 $\boxed{3}$]

スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A) 1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B) 1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C) 1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあれば，その玉を R に入れる。

(1) L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回おこない，さらに操作(B)を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回おこなう。このとき L にすべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

(1) L に 4 色揃うのは，

赤，青，黄，白のうちの 1 色が 2 回，他が各 1 回 …①

出るときである。

どの色が 2 回出るかで 4 通りあり，2 回出る 1 つの色を決めると

$\frac{5!}{2!}=5\cdot4\cdot3$ 通りある。

よって，L に 4 色揃う確率は $\frac{4\times5\cdot4\cdot3}{4^5}=\frac{15}{64}$ …②

R に 4 色揃う確率も同様に $P_1=②^2=\frac{225}{4096}$

(2) L に 4 色揃うのは①の場合で $P_2=②=\frac{15}{64}$

(3) L も R も 4 色揃うのは各色が 2 回以上出る場合で，出る回数は次の 2 種類ある。

(ⅰ) 2 回，2 回，2 回，4 回

(ⅱ) 2 回，2 回，3 回，3 回

(ⅰ)のとき

どの色が 4 回かで 4 通りあり，ある 1 つの色を決めると

他の 3 色の出方は ${}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 = 45 \cdot 28 \cdot 15$ 通りある。

(ⅱ)のとき

どの色が 2 回かで ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りあり，ある 2 つの色を決めると

他の 2 色の出方は ${}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot {}_6\mathrm{C}_3 = 45 \cdot 28 \cdot 20$ 通りある。

よって $P_3 = \dfrac{4 \times 45 \cdot 28 \cdot 15 + 6 \times 45 \cdot 28 \cdot 20}{4^{10}}$

また，$P_1 = \dfrac{(4 \times 5 \cdot 4 \cdot 3)^2}{4^{10}}$ であるから

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{4 \times 45 \cdot 28 \cdot 15 + 6 \times 45 \cdot 28 \cdot 20}{4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \times 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 3 + 6 \cdot 7}{4 \cdot 4} = \frac{63}{16}$$

［ 東京大学 2009 年前期 文科 $\boxed{4}$ ］

2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し $S=\int_0^2 |f'(x)|dx$ を考える。

(1) $f(0)=0,\ f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2) $f(0)=0,\ f(2)=2$ をみたしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ。

(1) $f(0)=c=0$ より $f(x)=ax^2+bx$

このとき $f(2)=4a+2b=2$ より $b=1-2a$

よって $f(x)=ax^2+(1-2a)x$， $f'(x)=2ax+1-2a$

（ｉ）$a=0$ のとき

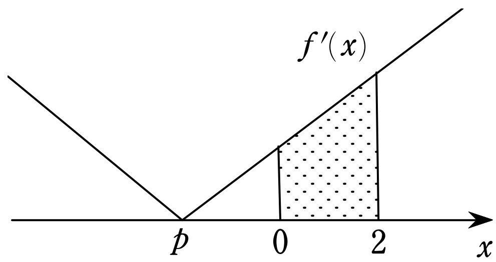
$f'(x)=1$ より $S=\int_0^2 1dx=2$

（ⅱ）$a>0$ のとき

$f'(x)=0$ となる x を p とおくと，

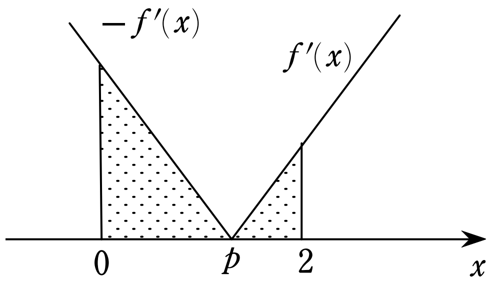
$p=\dfrac{2a-1}{2a}=1-\dfrac{1}{2a}<2$ で， $p\geqq 0 \Leftrightarrow a\geqq\dfrac{1}{2}$ である。

（ⅱ－A）$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$S=\int_0^2 f'(x)dx=f(2)-f(0)=2$

（ⅱ－B）$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$S=-\int_0^p f'(x)dx+\int_p^2 f'(x)dx$ …①

$=f(0)+f(2)-2f(p)$

$=2-2f\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)$

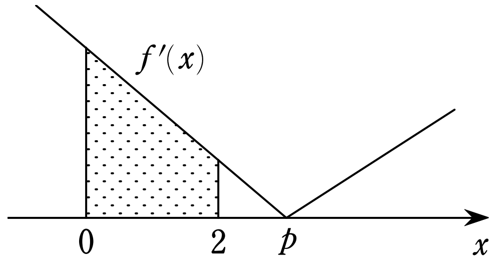
$=2-2\left\{\dfrac{(2a-1)^2}{4a}-\dfrac{(2a-1)^2}{2a}\right\}$

$=2+\dfrac{(2a-1)^2}{2a}$

$=2a+\dfrac{1}{2a}$

（iii） $a<0$ のとき

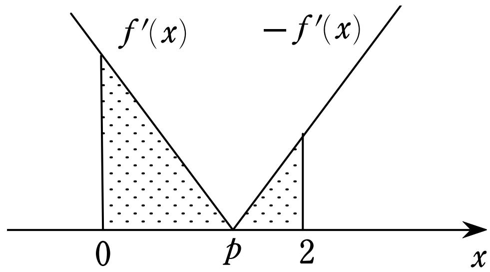
$p=1-\dfrac{1}{2a}>0$ で， $p\leqq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2a}\geqq -1 \Leftrightarrow a\leqq -\dfrac{1}{2}$ である。



（iii－A） $-\dfrac{1}{2}\leqq a<0$ のとき

$$S=\int_0^2 f'(x)\,dx=f(2)-f(0)=2$$

（iii－B） $a\leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき



$$S=\int_0^p f'(x)\,dx-\int_p^2 f'(x)\,dx$$

これは①の符号を変えたものであるから

$$S=-2a-\frac{1}{2a}$$

よって， $a\leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき $S=-2a-\dfrac{1}{2a}$

$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $S=2$ …②

$a\geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $S=2a+\dfrac{1}{2a}$

(2) $|a|\geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，（相加平均）≧（相乗平均）より

$$S=2|a|+\frac{1}{2|a|}\geqq 2\sqrt{2|a|\cdot\frac{1}{2|a|}}=2$$

これと②より S の最小値は 2