[東京大学 2009 年前期 文科 $\boxed{4}$]

2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し $S=\int_0^2|f'(x)|dx$ を考える。

(1) $f(0)=0,\ f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2) $f(0)=0,\ f(2)=2$ をみたしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ。

---

(1) $f(0)=c=0$ より $f(x)=ax^2+bx$

このとき $f(2)=4a+2b=2$ より $b=1-2a$

よって $f(x)=ax^2+(1-2a)x$，$f'(x)=2ax+1-2a$

（ i ）$a=0$ のとき

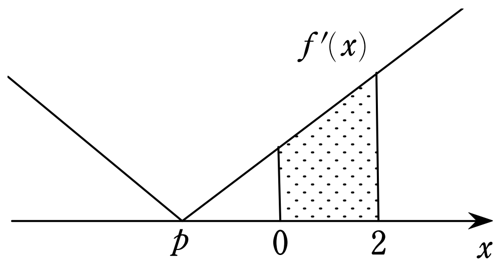
$f'(x)=1$ より $S=\int_0^2 1dx=2$

（ ii ）$a>0$ のとき

$f'(x)=0$ となる x を p とおくと，

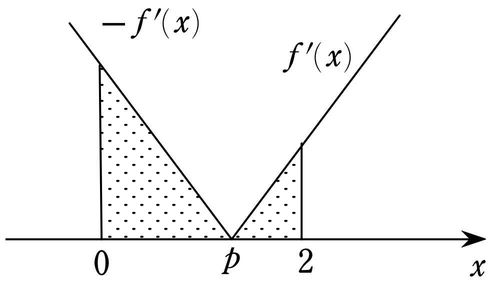
$p=\dfrac{2a-1}{2a}=1-\dfrac{1}{2a}<2$ で，$p\geqq 0 \Leftrightarrow a\geqq\dfrac{1}{2}$ である。

（ii－A）$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$S=\int_0^2 f'(x)\,dx=f(2)-f(0)=2$

（ii－B）$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$S=-\int_0^p f'(x)\,dx+\int_p^2 f'(x)\,dx$ …①

$=f(0)+f(2)-2f(p)$

$=2-2f\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)$

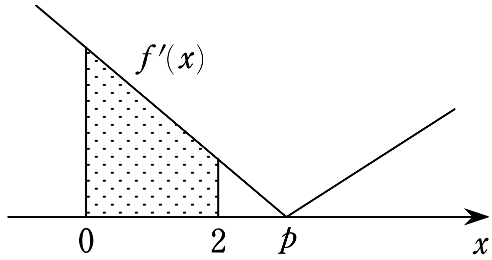
$=2-2\left\{\dfrac{(2a-1)^2}{4a}-\dfrac{(2a-1)^2}{2a}\right\}$

$=2+\dfrac{(2a-1)^2}{2a}$

$=2a+\dfrac{1}{2a}$

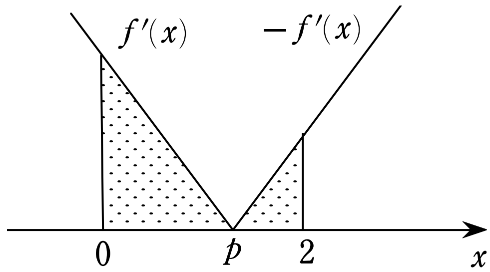
（iii）$a<0$ のとき

$p=1-\dfrac{1}{2a}>0$ で，$p \leqq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2a} \geqq -1 \Leftrightarrow a \leqq -\dfrac{1}{2}$ である。



（iii－A）$-\dfrac{1}{2} \leqq a<0$ のとき

$S=\int_0^2 f'(x)\,dx=f(2)-f(0)=2$



（iii－B）$a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき

$S=\int_0^p f'(x)\,dx-\int_p^2 f'(x)\,dx$

これは①の符号を変えたものであるから

$S=-2a-\dfrac{1}{2a}$

よって，$a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき $S=-2a-\dfrac{1}{2a}$

$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $S=2$ …②

$a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $S=2a+\dfrac{1}{2a}$

(2) $|a| \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，（相加平均）≧（相乗平均）より

$S=2|a|+\dfrac{1}{2|a|} \geqq 2\sqrt{2|a| \cdot \dfrac{1}{2|a|}}=2$

これと②より S の最小値は 2