

[東京大学 2009 年前期 文科 1]



座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし, 点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また, 点 (a, b) を中心とする半径 t の円 C_3 が, C_1 に内接し, かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし, b は正の実数とする。

- (1) a, b を t を用いて表せ。また, t がとり得る値の範囲を求めよ。
 (2) t が(1)で求めた範囲を動くとき, b の最大値を求めよ。



(1) O を原点とし, $A(1, 0)$, $P(a, b)$ とおく。

$OP = 2 - t$ より $t < 2$ …①

$a^2 + b^2 = (2 - t)^2$ …②

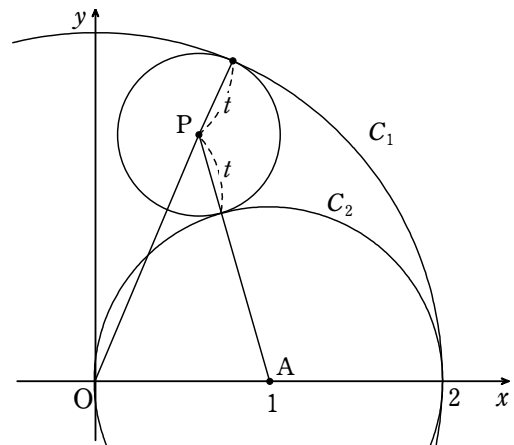
$AP = 1 + t$ より $(a - 1)^2 + b^2 = (1 + t)^2$ …③

②, ③より $a = 2 - 3t$

②に代入して $b^2 = 8t - 8t^2 = 8t(1 - t)$ …④

これと $b > 0$ より $b = 2\sqrt{2t(1 - t)}$

①と④ >0 より, t の範囲は $0 < t < 1$



(2) ④ $= -8\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2$ であるから

b^2 は $t = \frac{1}{2}$ のときに最大値 2 をとり,

b の最大値は $\sqrt{2}$