

[東京大学 2009 年前期 文科 1]



座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし, 点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また, 点 (a, b) を中心とする半径 t の円 C_3 が, C_1 に内接し, かつ C_2 に外接すると仮定する。

ただし, b は正の実数とする。

(1) a, b を t を用いて表せ。また, t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき, b の最大値を求めよ。



[東京大学 2009 年前期 文科 2]



自然数 $m \geq 2$ に対し, $m-1$ 個の二項係数 ${}_m C_1, {}_m C_2, \dots, {}_m C_{m-1}$ を考え, これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) m が素数ならば, $d_m = m$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 k に対し, $k^m - k$ が d_m で割り切れることを, k に関する帰納法によって示せ。



[東京大学 2009 年前期 文科 3]



スイッチを 1 回押すごとに、赤、青、黄、白のいずれかの色の玉が 1 個、等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を L に入れる。

(B) 1 回スイッチを押し、出てきた玉を R に入れる。

(C) 1 回スイッチを押し、出てきた玉と同じ色の玉が、L になければその玉を L に入れ、L にあれば、その玉を R に入れる。

(1) L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回おこない、さらに操作(B)を 5 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回おこなう。このとき L にすべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回おこなう。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。 $\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。



[東京大学 2009 年前期 文科 4]



2 次以下の整式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ に対し $S = \int_0^2 |f'(x)| dx$ を考える。

(1) $f(0) = 0, f(2) = 2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2) $f(0) = 0, f(2) = 2$ をみたしながら f が変化するとき, S の最小値を求めよ。

