[東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{1}$]

座標平面の点 $(x,\ y)$ を $(3x+y,\ -2x)$ へ移す移動 f を考え，点 P が移る行き先を $f(\mathrm{P})$ と表す。

f を用いて直線 $\ell_0,\ \ell_1,\ \ell_2,\ \cdots$ を以下のように定める。

・l_0 は直線 $3x+2y=1$ である。

・点 P が ℓ_n 上を動くとき，$f(\mathrm{P})$ が描く直線を ℓ_{n+1} とする $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$。

以下 ℓ_n を 1 次式を用いて $a_n x+b_n y=1$ と表す。

(1) $a_{n+1},\ b_{n+1}$ を $a_n,\ b_n$ を用いて表せ。

(2) 不等式 $a_n x+b_n y>1$ が定める領域を D_n とする。

$D_0,\ D_1,\ D_2,\ \cdots$ すべての含まれるような点の範囲を図示せよ。

---

(1) $(x,\ y)$ が $a_n x+b_n y=1$ …① を満たすとき，

$X=3x+y$ …②，$Y=-2x$ …③ で定まる点 $(X,\ Y)$ の軌跡が ℓ_{n+1} である。

③より $x=-\dfrac{1}{2}Y$ ，②と③より $y=X+\dfrac{3}{2}Y$

これらを①に代入して $a_n\left(-\dfrac{1}{2}Y\right)+b_n\left(X+\dfrac{3}{2}Y\right)=1$

$X,\ Y$ を $x,\ y$ と書き改めて整理すると，

ℓ_{n+1} は $b_n x+\left(-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}b_n\right)y=1$

よって，$a_{n+1}=b_n$ …④，$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}b_n$ …⑤

(2) $a_0=3,\ b_0=2$ と④より $a_1=2$

④より $b_n=a_{n+1},\ b_{n+1}=a_{n+2}$ であるから，⑤に代入して

$a_{n+2}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}a_{n+1}$ …⑥

⑥ ⇔ $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$ より $a_{n+1}-a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(a_1-a_0)=-\dfrac{1}{2^n}$ …⑦

⑥ ⇔ $a_{n+2}-\dfrac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n$ より $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n=a_1-\dfrac{1}{2}a_0=\dfrac{1}{2}$ …⑧

（⑧－⑦）×2 より $a_n=1+\dfrac{2}{2^n}$

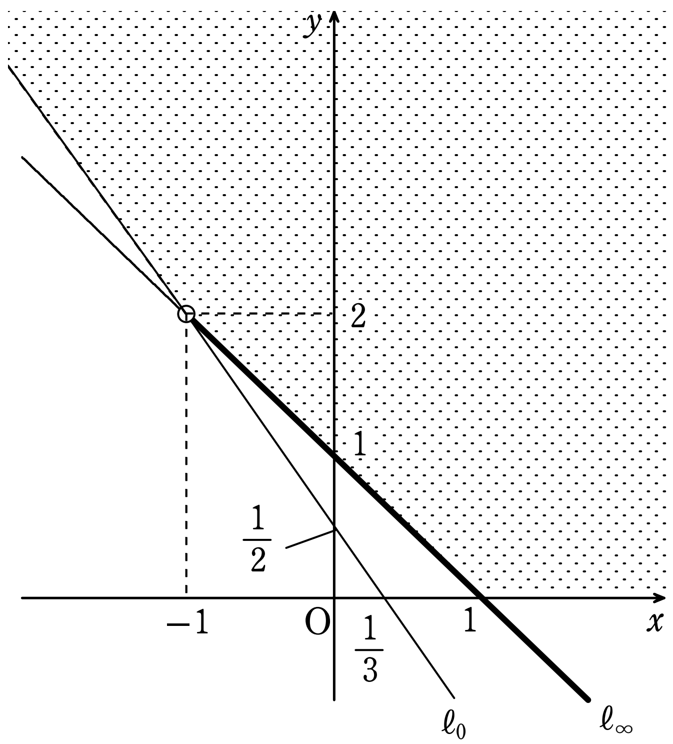
よって $b_n=a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2^n}$

したがって，ℓ_n は $\left(2+\dfrac{2}{2^n}\right)x+\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)y=1$

これは $x+y=1$ かつ $2x+y=0$ のとき n によらず成り立つから，定点 $(-1, 2)$ を通る。

また，x 切片 $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{2^n}}$ は単調増加で，$n\to\infty$ のとき 1 に近づく。

答えは図の打点部分で，太実線のみ含む。



[東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{2}$]

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚を手元にもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

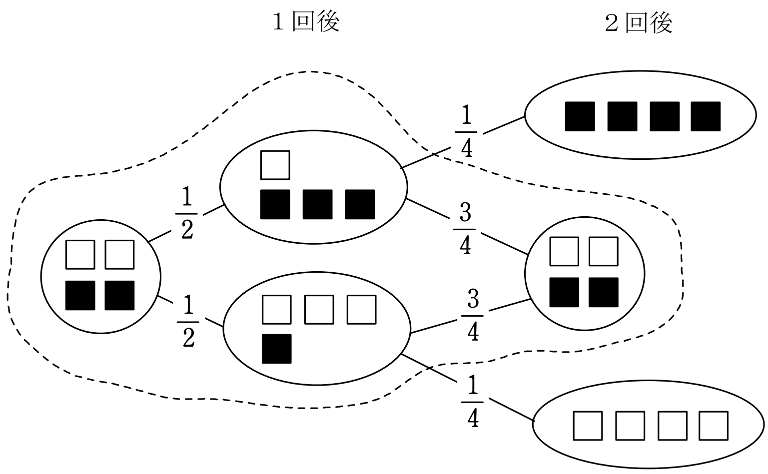
以下の問(1)，(2)に答えよ。

(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

---

(1) 2 回後までは図のようになり，2 回後は 4 枚とも同色になるか，最初の状態に戻る。



よって，題意の確率を p_n とおくと

（ i ）n が奇数のとき

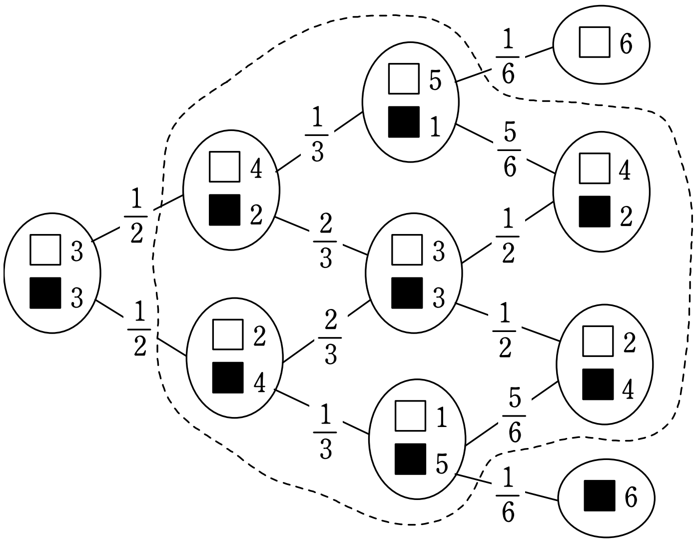
$$p_n = 0$$

（ ii ）n が偶数のとき

題意が満たされるのは，図の破線で囲んだ状態を $\dfrac{n}{2}-1$ 回繰り返し，

その 2 回後に 4 枚とも同色になる場合であるから $p_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \dfrac{1}{4}$

(2) 3 回後は 6 枚とも同色か，1 回後の状態に戻る。



題意の確率を q_n とおくと

（ｉ）$n=1$ または n が偶数のとき

$q_n=0$

（ⅱ）n が 3 以上の奇数のとき

題意が満たされるのは，図の破線で囲んだ状態を $\dfrac{n-1}{2}-1$ 回繰り返し，

その 2 回後に 6 枚とも同色になる場合である。

白 4 黒 2 または 白 2 黒 4 から，その 2 回後に白 6 または 黒 6 になる確率は

$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}$ であるから，白 4 黒 2 または 白 2 黒 4 に戻る確率は $1-\dfrac{1}{18}=\dfrac{17}{18}$

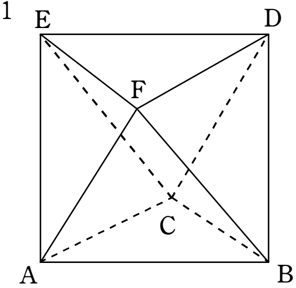
よって $q_n=\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}\cdot\dfrac{1}{18}$

[東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{3}$]

(1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ とする。$\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。

図1

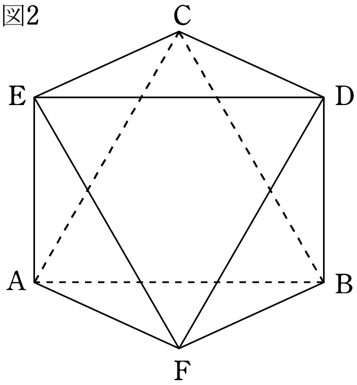


(1) 図 1 で $\mathrm{FA}=\mathrm{FB}$ より，真上から見ても $\mathrm{FA}=\mathrm{FB}$ で，DC と DB，EA と EC についても同様である。

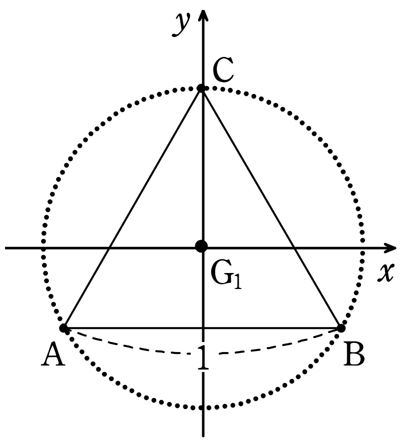
また，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{DEF}$ は合同であるから答えは図 2。

なお，G_1 と G_2 は重なって見える。

図2



(2) 図 3 のように G_1 が原点で，$\triangle\mathrm{ABC}$ が xy 平面上にあるように設定する。



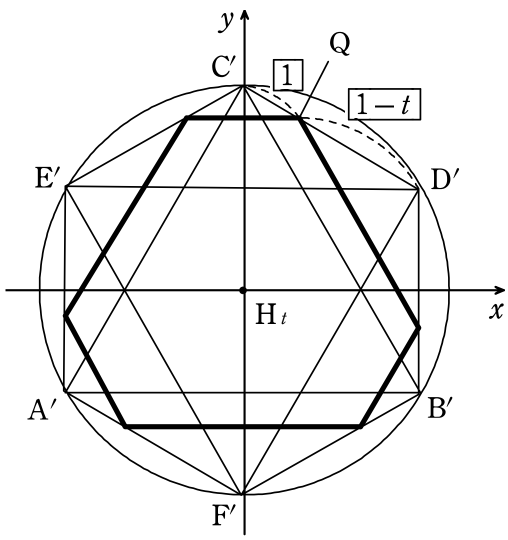
$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$，$\mathrm{C}\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ であるから

$\mathrm{F}\left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, h\right)$ とおける。

$\mathrm{BF}^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} + h^2 = 1$ より $h^2 = \dfrac{2}{3}$ であるから $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2 = h = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ …①

$\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2$ を $t:(1-t)$ に内分する点 H_t を通り，$\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2$ に垂直な平面 P_t で八面体を切った切り口は図の太線の六角形になる。

P_t 上に図のように各点をとると，回転体を P_t で切った切り口は半径 $\mathrm{H}_1\mathrm{Q}$ の円である。



$$\overrightarrow{\mathrm{H}_t\mathrm{Q}} = \overrightarrow{\mathrm{H}_t\mathrm{C}'} + t\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{D}'}$$

$$= \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) + t\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$$

より円の面積は $\pi \cdot \mathrm{H}_t\mathrm{Q}^2 = \pi\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{3}t^2\right)$ …②

①より，P_t と $P_{t+\Delta t}$ の幅は $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\Delta t$ であるから，

P_t と $P_{t+\Delta t}$ で挟まれた部分の体積は ②$\times\sqrt{\dfrac{2}{3}}\Delta t$ で近似できる。

よって求める体積は $\displaystyle\int_0^1$ ②$\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,dt = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{3\sqrt{3}}\int_0^1 (1 - t + t^2)\,dt$

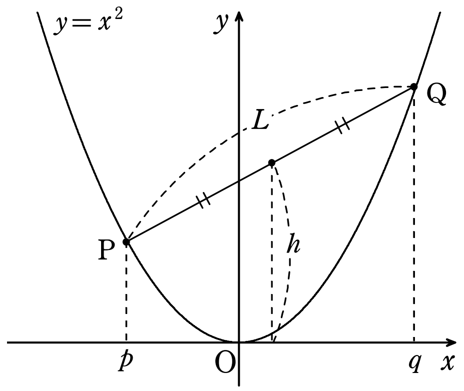
$$= \frac{5}{54}\sqrt{6}\pi$$

[**東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{4}$**]

放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ。

(2) L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ。



(1) $\mathrm{P}(p,\ p^2),\ \mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと

$m=p+q$ …①

$$L^2=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2$$

$$=(p-q)^2\left\{1+(p+q)^2\right\}$$

$$=(p-q)^2(1+m^2)$$

よって $(p-q)^2=\dfrac{L^2}{1+m^2}$ …② であり，

①②から $h=\dfrac{p^2+q^2}{2}=\dfrac{1}{4}\left\{(p+q)^2+(p-q)^2\right\}=\dfrac{1}{4}\left\{m^2+\dfrac{L^2}{1+m^2}\right\}$

(2) $m^2=t$ とおき，$t+\dfrac{L^2}{1+t}=f(t)$ とすると，

$t\geqq 0$ で $f'(t)=1-\dfrac{L^2}{(1+t)^2}=\dfrac{(1+t)^2-L^2}{(1+t)^2}$

(ⅰ) $L\leqq 1$ のとき

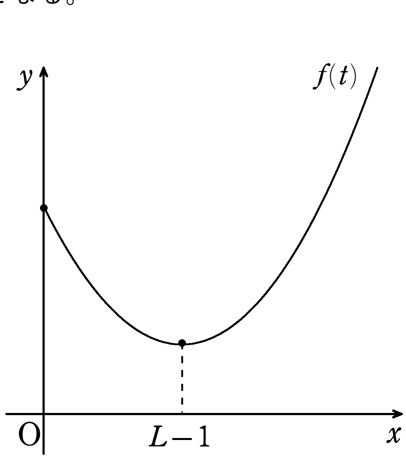
$f'(t)\geqq 0$ であるから $f(t)$ は単調増加で $t=0$ のときに最小となる。

h の最小値は $\dfrac{1}{4}f(0)=\dfrac{L^2}{4}$

(ⅱ) $L\geqq 1$ のとき

$f(t)$ は，$1+t=L$ すなわち $t=L-1$ のときに最小となる。

h の最小値は $\dfrac{1}{4}f(L-1)=\dfrac{2L-1}{4}$



[東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{5}$]

自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば $\boxed{1}=1$, $\boxed{2}=11$, $\boxed{3}=111$ である。

(1) m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2) n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

---

(1) 帰納法で示す。

$\boxed{3^0}=\boxed{1}=1$ より $m=0$ のとき成り立つ。

$m=k$ のとき成り立つとする。

$m=k+1$ のとき

$$\boxed{3^{k+1}}=\overbrace{111\cdots111}^{3^{k+1}\text{個}}$$

$$=\overbrace{11\cdots11}^{3^k\text{個}}\overbrace{11\cdots11}^{3^k\text{個}}\overbrace{11\cdots11}^{3^k\text{個}}$$

$$=\boxed{3^k}\times\left(10^{2\cdot3k}+10^{3k}+1\right)\ \cdots①$$

帰納法の仮定から，$\boxed{3^k}$ は 3^k で割り切れるが 3^{k+1} では割り切れない。

また，$10^{2\cdot3k}+10^{3k}+1$ は 3 で割り切れるが，9 では割り切れない。

よって，①は 3^{k+1} で割り切れるが 3_{k+2} では割り切れないから，

$m=k+1$ のときも成り立つ。

したがって，題意は示された。

(2) 十分性は，$\boxed{n}$ が $\boxed{3^3}$ を整数個並べたものなので(1)より成り立つ。

以下，必要性を示す。

$\boxed{n}$ を 9 で割った余りは各位の数の和である n を 9 で割った余りとなるから

$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるには，n が 9 で割り切れることが必要。

よって，n は $27k$ または $27k+9$ または $27k+18$ である。

（ｉ）$n=27k+9$ のとき

$$\boxed{n}=\overbrace{111\cdots111}^{27k+9\text{個}}$$

$$=\underbrace{\overbrace{11\cdots11}^{3^3\text{個}}}_{<1>}\cdots\underbrace{\overbrace{11\cdots11}^{3^3\text{個}}}_{<k>}\underbrace{\overbrace{11\cdots11}^{3^2\text{個}}}_{※}$$

(1)より $<1>, \cdots, <k>$ は 3^3 で割り切れ，

※は 3^2 で割り切れるが 3^3 で割り切れないから

$\boxed{n}$ は 27 で割り切れず，不適。

（ⅱ）$n=27k+18$ のとき

上記の※が $\overbrace{111\cdots111}^{18\text{個}}=\overbrace{11\cdots11}^{3^2\text{個}}\overbrace{11\cdots11}^{3^2\text{個}}=\boxed{3^2}\times\left(10^9+1\right)$ …② となるので

10^9+1 は 3 で割り切れないから②は 3^3 で割り切れず，

$\boxed{n}$ も 27 で割り切れないから不適。

以上より $n=27k$ であることが必要で，題意は示された。

[東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{6}$]

座標平面において，媒介変数 t を用いて $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

$\mathrm{P}_t(\cos 2t,\ t\sin t)$ とおく。

まず，$t \neq 0,\ \pi,\ 2\pi$ では異なる t に異なる P_t が対応すること …① を示す。

$\mathrm{P}_a = \mathrm{P}_b$（$0 \leqq a < b \leqq 2\pi$ …②）とすると

$\cos 2a = \cos 2b$ …③，$a\sin a = b\sin b$ …④

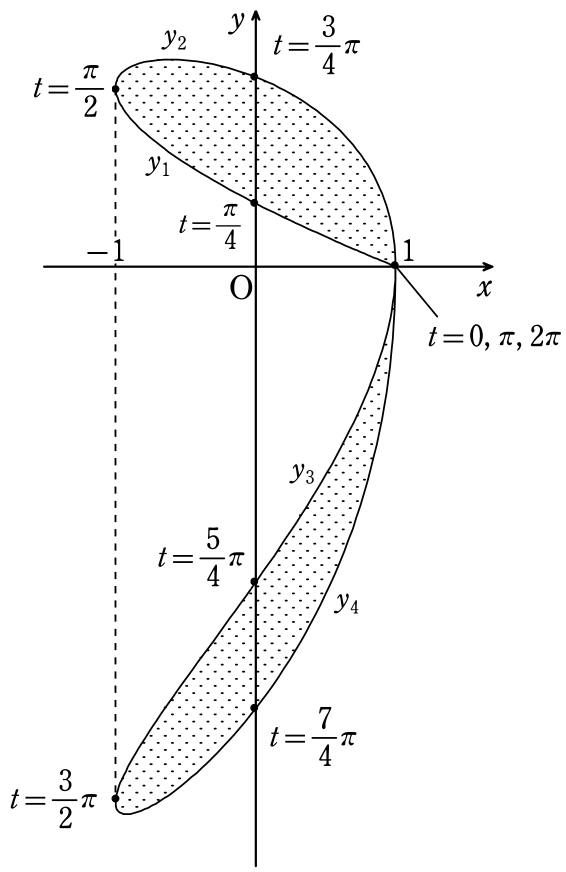
③より $1-2\sin^2 a = 1-2\sin^2 b \iff \sin^2 b = \sin^2 a$ …⑤

④より $a^2\sin^2 a = b^2\sin^2 b$ であるから⑤より $(a^2-b^2)\sin^2 a = 0$

②より $a^2 \neq b^2$ であるから $\sin^2 a = 0$ より $\sin a = 0$

よって $\sin b = 0$ であるから a, b は 0 または π または 2π であり，①が示された。

①と，x の増減，y の正負，y 切片の大小に注意すると曲線は図のようになる。



$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$, $\pi \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分を

それぞれ y_1, y_2, y_3, y_4 とすると求める面積は

$$\int_{-1}^{1} y_2\,dx - \int_{-1}^{1} y_1\,dx + \left\{\int_{-1}^{1} (-y_4)\,dx - \int_{-1}^{1} (-y_3)\,dx\right\}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{2\pi}^{\frac{3}{2}\pi} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{2\pi}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt \quad \cdots ⑥$$

ここで,

$$\int y\frac{dx}{dt}dt = \int t\sin t(-2\sin 2t)dt$$

$$= \int t(-2\sin t\sin 2t)dt$$

$$= \int t\left\{\cos(2t+t) - \cos(2t-t)\right\}dt$$

$$= \int t\left(\cos 3t - \cos t\right)dt$$

$$= t\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right) + \int\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right)dt$$

$$= \left[t\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right) + \frac{1}{9}\cos 3t - \cos t\right]_0^{\pi} + \left[t\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right) + \frac{1}{9}\cos 3t - \cos t\right]_{2\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{32}{9}$$