[**東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{6}$**]

座標平面において，媒介変数tを用いて $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=t\sin t \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

$\mathrm{P}_t(\cos 2t,\ t\sin t)$ とおく。

まず，$t \neq 0,\ \pi,\ 2\pi$ では異なるtに異なるP_tが対応すること …① を示す。

$\mathrm{P}_a=\mathrm{P}_b$（$0 \leqq a < b \leqq 2\pi$ …②）とすると

$\cos 2a=\cos 2b$ …③，$a\sin a=b\sin b$ …④

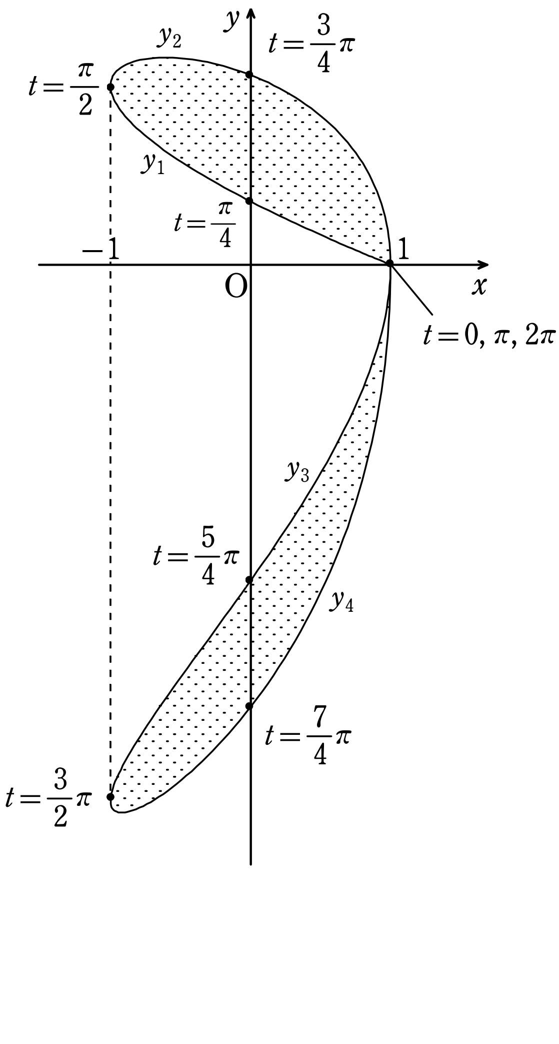
③より $1-2\sin^2 a=1-2\sin^2 b \Leftrightarrow \sin^2 b=\sin^2 a$ …⑤

④より $a^2\sin^2 a=b^2\sin^2 b$ であるから⑤より $(a^2-b^2)\sin^2 a=0$

②より $a^2 \neq b^2$ であるから $\sin^2 a=0$ より $\sin a=0$

よって $\sin b=0$ であるから $a,\ b$は 0 または π または 2π であり，①が示された。

①と，xの増減，yの正負，y切片の大小に注意すると曲線は図のようになる。



$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$, $\pi \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}\pi$, $\dfrac{3}{2}\pi \leqq t \leqq 2\pi$ に対応する部分を

それぞれ y_1, y_2, y_3, y_4 とすると求める面積は

$$\int_{-1}^{1} y_2\,dx - \int_{-1}^{1} y_1\,dx + \left\{ \int_{-1}^{1} (-y_4)\,dx - \int_{-1}^{1} (-y_3)\,dx \right\}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y\frac{dx}{dt}dt - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{2\pi}^{\frac{3}{2}\pi} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{2\pi}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt \quad \cdots ⑥$$

ここで,

$$\int y\frac{dx}{dt}dt = \int t\sin t(-2\sin 2t)dt$$

$$= \int t(-2\sin t\sin 2t)dt$$

$$= \int t\left\{\cos(2t+t) - \cos(2t-t)\right\}dt$$

$$= \int t\left(\cos 3t - \cos t\right)dt$$

$$= t\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right) + \int\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right)dt$$

$$= \left[t\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right) + \frac{1}{9}\cos 3t - \cos t\right]_0^{\pi} + \left[t\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right) + \frac{1}{9}\cos 3t - \cos t\right]_{2\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{32}{9}$$