[東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{5}$]

自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば $\boxed{1}=1$, $\boxed{2}=11$, $\boxed{3}=111$ である。

(1) m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2) n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

(1) 帰納法で示す。

$\boxed{3^0}=\boxed{1}=1$ より $m=0$ のとき成り立つ。

$m=k$ のとき成り立つとする。

$m=k+1$ のとき

$$\boxed{3^{k+1}}=\overbrace{111\cdots111}^{3^{k+1}\text{個}}$$

$$=\overbrace{11\cdots11}^{3^k\text{個}}\overbrace{11\cdots11}^{3^k\text{個}}\overbrace{11\cdots11}^{3^k\text{個}}$$

$$=\boxed{3^k}\times\left(10^{2\cdot3k}+10^{3k}+1\right)\quad\cdots①$$

帰納法の仮定から，$\boxed{3^k}$ は 3^k で割り切れるが 3^{k+1} では割り切れない。

また，$10^{2\cdot3k}+10^{3k}+1$ は 3 で割り切れるが，9 では割り切れない。

よって，①は 3^{k+1} で割り切れるが 3_{k+2} では割り切れないから，

$m=k+1$ のときも成り立つ。

したがって，題意は示された。

(2) 十分性は，$\boxed{n}$ が $\boxed{3^3}$ を整数個並べたものなので(1)より成り立つ。

以下，必要性を示す。

$\boxed{n}$ を 9 で割った余りは各位の数の和である n を 9 で割った余りとなるから

$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるには，n が 9 で割り切れることが必要。

よって，n は $27k$ または $27k+9$ または $27k+18$ である。

（ⅰ）$n=27k+9$ のとき

$$\boxed{n}=\overbrace{111\cdots111}^{27k+9\text{個}}$$

$$=\underbrace{\overbrace{11\cdots11}^{3^3\text{個}}}_{<1>}\cdots\underbrace{\overbrace{11\cdots11}^{3^3\text{個}}}_{<k>}\underbrace{\overbrace{11\cdots11}^{3^2\text{個}}}_{※}$$

(1)より $<1>,\cdots,<k>$ は 3^3 で割り切れ,

※は 3^2 で割り切れるが 3^3 で割り切れないから

$\boxed{n}$ は 27 で割り切れず，不適。

（ⅱ）$n=27k+18$ のとき

上記の※が $\overbrace{111\cdots111}^{18\text{個}}=\overbrace{11\cdots11}^{3^2\text{個}}\overbrace{11\cdots11}^{3^2\text{個}}=\boxed{3^2}\times\left(10^9+1\right)$ …② となるので

10^9+1 は 3 で割り切れないから②は 3^3 で割り切れず,

$\boxed{n}$ も 27 で割り切れないから不適。

以上より $n=27k$ であることが必要で，題意は示された。