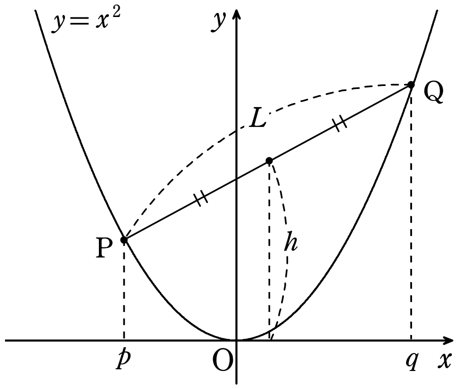
[東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{4}$]

放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ。

(2) L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ。

(1) $\mathrm{P}(p,\ p^2),\ \mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと



$m=p+q$ …①

$$L^2=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2$$
$$=(p-q)^2\left\{1+(p+q)^2\right\}$$
$$=(p-q)^2(1+m^2)$$

よって $(p-q)^2=\dfrac{L^2}{1+m^2}$ …② であり，

①②から $h=\dfrac{p^2+q^2}{2}=\dfrac{1}{4}\left\{(p+q)^2+(p-q)^2\right\}=\dfrac{1}{4}\left\{m^2+\dfrac{L^2}{1+m^2}\right\}$

(2) $m^2=t$ とおき，$t+\dfrac{L^2}{1+t}=f(t)$ とすると，

$t\geqq 0$ で $f'(t)=1-\dfrac{L^2}{(1+t)^2}=\dfrac{(1+t)^2-L^2}{(1+t)^2}$

(i) $L\leqq 1$ のとき

$f'(t)\geqq 0$ であるから $f(t)$ は単調増加で $t=0$ のときに最小となる。

h の最小値は $\dfrac{1}{4}f(0)=\dfrac{L^2}{4}$

(ii) $L\geqq 1$ のとき

$f(t)$ は，$1+t=L$ すなわち $t=L-1$ のときに最小となる。

h の最小値は $\dfrac{1}{4}f(L-1)=\dfrac{2L-1}{4}$