［ 東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{3}$ ］

(1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を G_1, G_2 とする。G_1, G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。

(1) 図 1 で $FA = FB$ より，真上から見ても $FA = FB$ で，DC と DB，EA と EC についても同様である。

また，$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同であるから答えは図 2。

なお，G_1 と G_2 は重なって見える。

図1

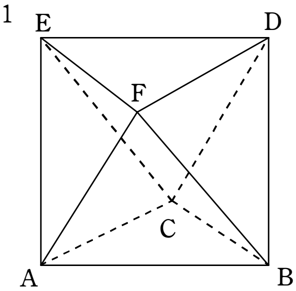
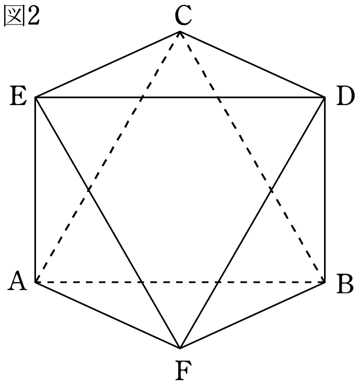
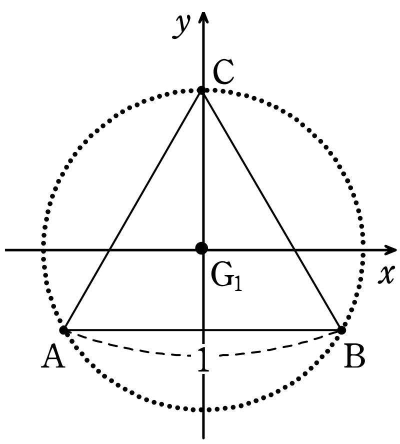


図2



(2) 図 3 のように G_1 が原点で，$\triangle ABC$ が xy 平面上にあるように設定する。



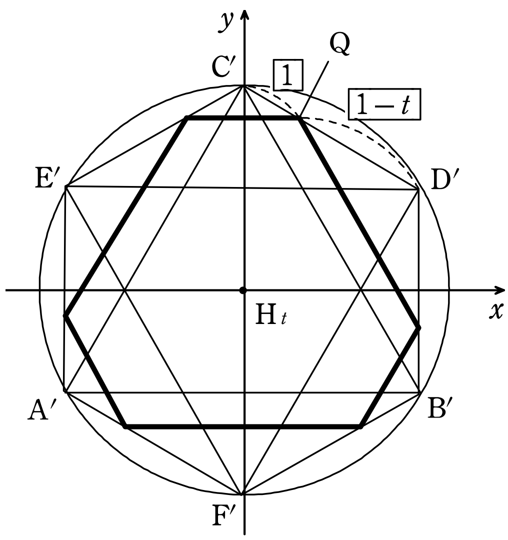
$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$，$\mathrm{C}\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ であるから

$\mathrm{F}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, h\right)$ とおける。

$\mathrm{BF}^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}+h^2 = 1$ より $h^2 = \frac{2}{3}$ であるから $\mathrm{G_1G_2} = h = \sqrt{\frac{2}{3}}$ …①

$\mathrm{G_1G_2}$ を $t:(1-t)$ に内分する点 H_t を通り，$\mathrm{G_1G_2}$ に垂直な平面 P_t で八面体を切った切り口は図の太線の六角形になる。

P_t 上に図のように各点をとると，回転体を P_t で切った切り口は半径 $\mathrm{H_1Q}$ の円である。



$$\overrightarrow{\mathrm{H}_t\mathrm{Q}} = \overrightarrow{\mathrm{H}_t\mathrm{C}'} + t\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{D}'}$$

$$= \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) + t\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right)$$

より円の面積は $\pi\cdot\mathrm{H}_t\mathrm{Q}^2 = \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}t^2\right)$ …②

①より，P_t と $P_{t+\Delta t}$ の幅は $\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t$ であるから，

P_t と $P_{t+\Delta t}$ で挟まれた部分の体積は ②$\times\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta t$ で近似できる。

よって求める体積は $\int_0^1$ ②$\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{3\sqrt{3}}\int_0^1 (1-t+t^2)\,dt$

$$= \frac{5}{54}\sqrt{6}\pi$$