

[東京大学 2008 年前期 理科 2]

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚を手元にもっているとき、次の操作 (A) を考える。

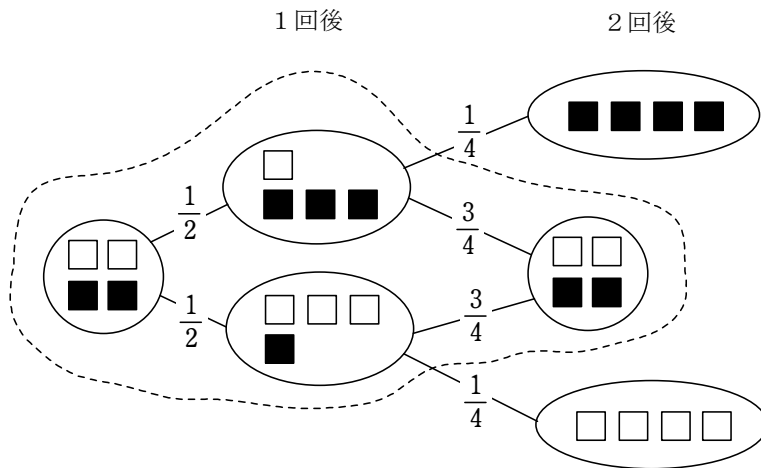
(A) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を、確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問(1), (2)に答えよ。

(1) 最初に白 2 枚, 黒 2 枚, 合計 4 枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 最初に白 3 枚, 黒 3 枚, 合計 6 枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて, 6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(1) 2 回後までは図のようになり, 2 回後は 4 枚とも同色になるか, 最初の状態に戻る。



よって, 題意の確率を p_n とおくと

(i) n が奇数のとき

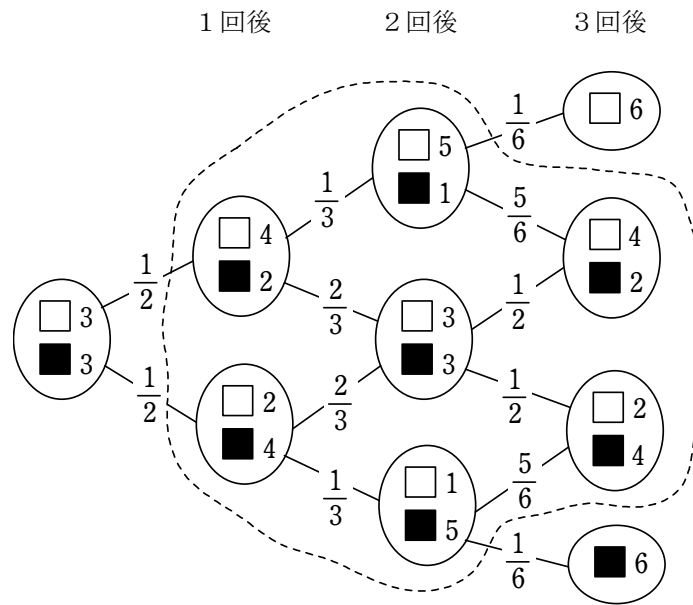
$$p_n = 0$$

(ii) n が偶数のとき

題意が満たされるのは, 図の破線で囲んだ状態を $\frac{n}{2} - 1$ 回繰り返して,

$$\text{その 2 回後に 4 枚とも同色になる場合であるから } p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{1}{4}$$

(2) 3 回後は 6 枚とも同色か、1 回後の状態に戻る。



題意の確率を q_n とおくと

(i) $n=1$ または n が偶数のとき

$$q_n = 0$$

(ii) n が 3 以上の奇数のとき

題意が満たされるのは、図の破線で囲んだ状態を $\frac{n-1}{2} - 1$ 回繰り返す、

その 2 回後に 6 枚とも同色になる場合である。

白 4 黒 2 または 白 2 黒 4 から、その 2 回後に白 6 または 黒 6 になる確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \text{ であるから、白 4 黒 2 または 白 2 黒 4 に戻る確率は } 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

$$\text{よって } q_n = \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}} \cdot \frac{1}{18}$$