[東京大学 2008 年前期 理科 $\boxed{1}$]

座標平面の点$(x,\ y)$を$(3x+y,\ -2x)$へ移す移動fを考え，点Pが移る行き先を$f(\mathrm{P})$と表す。

fを用いて直線$\ell_0,\ \ell_1,\ \ell_2,\ \cdots$を以下のように定める。

・l_0は直線$3x+2y=1$である。

・点Pがℓ_n上を動くとき，$f(\mathrm{P})$が描く直線をℓ_{n+1}とする$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$。

以下ℓ_nを 1 次式を用いて$a_nx+b_ny=1$と表す。

(1) $a_{n+1},\ b_{n+1}$を$a_n,\ b_n$を用いて表せ。

(2) 不等式$a_nx+b_ny>1$が定める領域をD_nとする。

$D_0,\ D_1,\ D_2,\ \cdots$すべての含まれるような点の範囲を図示せよ。

---

(1) $(x,\ y)$が $a_nx+b_ny=1$ $\cdots$① を満たすとき，

$X=3x+y$ $\cdots$②，$Y=-2x$ $\cdots$③ で定まる点$(X,\ Y)$の軌跡が ℓ_{n+1} である。

③より $x=-\dfrac{1}{2}Y$ ，②と③より $y=X+\dfrac{3}{2}Y$

これらを①に代入して $a_n\left(-\dfrac{1}{2}Y\right)+b_n\left(X+\dfrac{3}{2}Y\right)=1$

$X,\ Y$を$x,\ y$と書き改めて整理すると，

ℓ_{n+1} は $b_nx+\left(-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}b_n\right)y=1$

よって，$a_{n+1}=b_n$ $\cdots$④，$b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}b_n$ $\cdots$⑤

(2) $a_0=3,\ b_0=2$ と④より $a_1=2$

④より $b_n=a_{n+1},\ b_{n+1}=a_{n+2}$ であるから，⑤に代入して

$a_{n+2}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}a_{n+1}$ $\cdots$⑥

⑥ $\Leftrightarrow$ $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$ より $a_{n+1}-a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(a_1-a_0)=-\dfrac{1}{2^n}$ $\cdots$⑦

⑥ ⇔ $a_{n+2}-\dfrac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n$ より $a_{n+1}-\dfrac{1}{2}a_n=a_1-\dfrac{1}{2}a_0=\dfrac{1}{2}$ …⑧

（⑧－⑦）×2 より $a_n=1+\dfrac{2}{2^n}$

よって $b_n=a_{n+1}=1+\dfrac{1}{2^n}$

したがって，ℓ_n は $\left(2+\dfrac{2}{2^n}\right)x+\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)y=1$

これは $x+y=1$ かつ $2x+y=0$ のとき n によらず成り立つから，定点 $(-1, 2)$ を通る。

また，x 切片 $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{2^n}}$ は単調増加で，$n\to\infty$ のとき 1 に近づく。

答えは図の打点部分で，太実線のみ含む。