

[東京大学 2008 年前期 理科 1]



座標平面の点 (x, y) を $(3x + y, -2x)$ へ移す移動 f を考え、点 P が移る行き先を $f(P)$ と表す。

f を用いて直線 l_0, l_1, l_2, \dots を以下のように定める。

・ l_0 は直線 $3x + 2y = 1$ である。

・ 点 P が l_n 上を動くとき、 $f(P)$ が描く直線を l_{n+1} とする ($n = 0, 1, 2, \dots$)。

以下 l_n を 1 次式を用いて $a_n x + b_n y = 1$ と表す。

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

(2) 不等式 $a_n x + b_n y > 1$ が定める領域を D_n とする。

D_0, D_1, D_2, \dots すべての含まれるような点の範囲を図示せよ。



[東京大学 2008 年前期 理科 2]



白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚を手元にもっているとき、次の操作 (A) を考える。

(A) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を、確率 $\frac{1}{k}$ で選び出し、それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問(1), (2)に答えよ。

(1) 最初に白 2 枚, 黒 2 枚, 合計 4 枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 最初に白 3 枚, 黒 3 枚, 合計 6 枚のカードをもっているとき, 操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて, 6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。



[東京大学 2008 年前期 理科 3]



- (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。
- (2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり、それぞれの面の重心を G_1, G_2 とする。 G_1, G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし、各辺の長さは 1 とする。



[東京大学 2008 年前期 理科 4]



放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

- (1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で, h を表せ。
- (2) L を固定したとき, h がとりうる値の最小値を求めよ。



[東京大学 2008 年前期 理科 5]



自然数 n に対し, $\frac{10^n - 1}{9} = \overbrace{111 \cdots 111}^{n \text{ 個}}$ を \boxed{n} で表す。たとえば $\boxed{1} = 1$, $\boxed{2} = 11$, $\boxed{3} = 111$ である。

(1) m を 0 以上の整数とする。 $\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが, 3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2) n が 27 で割り切れることが, \boxed{n} が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。



[東京大学 2008 年前期 理科 6]



座標平面において、媒介変数 t を用いて $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ と表される曲線が囲む領域の

面積を求めよ。

