[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{1}$]

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ をみたす実数 α, β と，2 次式 $f(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ について，$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^2 + \alpha\beta\right)dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \alpha\beta\right)$$

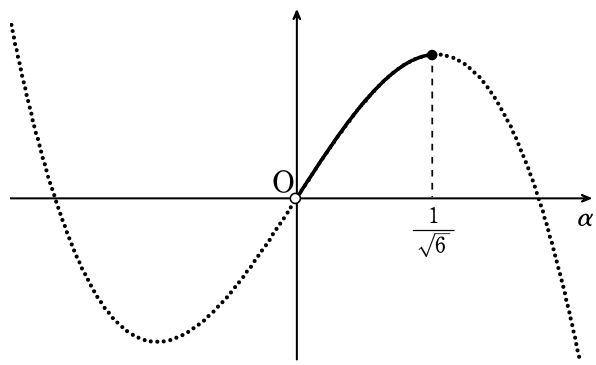
$2\left(\frac{1}{3} + \alpha\beta\right) = 1$ より $\alpha\beta = \frac{1}{6}$ …①

よって $S = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2}x^2 + \alpha\beta x\right]_0^{\alpha}$

$$= -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha \cdot \alpha\beta$$

$$= -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{1}{6}$$

$$= -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{12}\alpha$$



このとき $S' = -\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{6}\right)$

①と $0 \leqq \alpha \leqq \beta$ より $0 < \alpha \leqq \frac{1}{6\alpha}$ なので $0 < \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}$

よって $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ で最大値 $-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6\sqrt{6}} + \frac{1}{12\sqrt{6}} = \frac{1}{18\sqrt{6}}$ をとる。

[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{2}$]

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手元にもっているとき，次の操作(A)を考える。

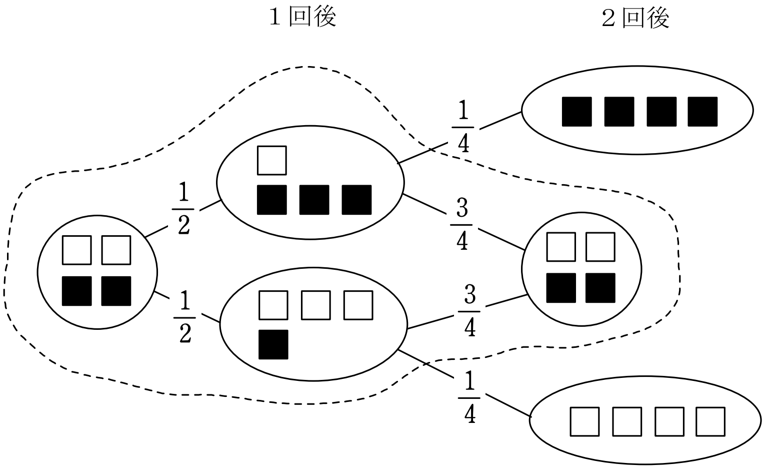
(A) 手持ちの 4 枚の中から 1 枚を，確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の問(1)，(2)に答えよ。

(1) 操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 2 回後までは図のようになり，2 回後は 4 枚とも同色になるか，最初の状態に戻る。



よって，題意の確率を p_n とおくと

(i) n が奇数のとき

$p_n = 0$

(ii) n が偶数のとき

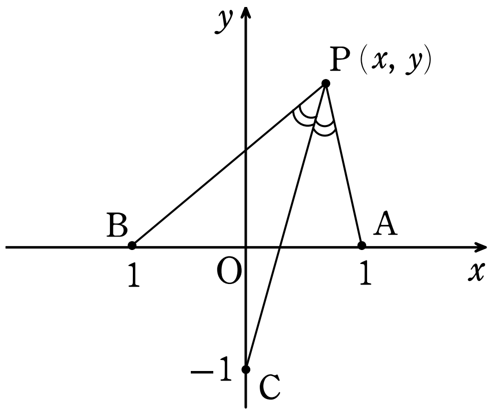
題意が満たされるのは，図の破線で囲んだ状態を $\dfrac{n}{2}-1$ 回繰り返し，

その 2 回後に 4 枚とも同色になる場合であるから $p_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \dfrac{1}{4}$

(1) $n = 4$ として $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{16}$

[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{3}$]

座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(-1, 0)$, $\mathrm{C}(0, -1)$ に対し，$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし $\mathrm{P}\neq \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ とする。



$\mathrm{P}(x, y)$ とおくと，$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$

$$\Leftrightarrow \cos\angle\mathrm{APC}=\cos\angle\mathrm{BPC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\times|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\times|\overrightarrow{\mathrm{PA}}| \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(1-x, -y)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-1-x, -y)$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(-x, -1-y)$ より

①は $(x^2+y^2-x+y)\sqrt{x^2+y^2+2x+1}=(x^2+y^2+x+y)\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$ $\cdots$②

$x^2+y^2=a$ とおくと，②は $(a-x+y)\sqrt{a+2x+1}=(a+x+y)\sqrt{a-2x+1}$

$$\Leftrightarrow (a-x+y)^2(a+2x+1)=(a+x+y)^2(a-2x+1) \quad \cdots ③$$

かつ $a-x+y$ と $a+x+y$ が同符号（0 を含む）$\cdots$④

③より $\{(a+y)^2-2x(a+y)+x^2\}(a+2x+1)=\{(a+y)^2-2x(a+y)+x^2\}(a-2x+1)$

$(a+y)^2+x^2=A,\ 2x(a+y)=B,\ a+1=C,\ 2x=D$ とおくと

$(A-B)(C+D)=(A+B)(C-D) \ \Leftrightarrow\ AD-BC=0$

よって $\{(a+y)^2+x^2\}\cdot 2x-2x(a+y)(a+1)=0$

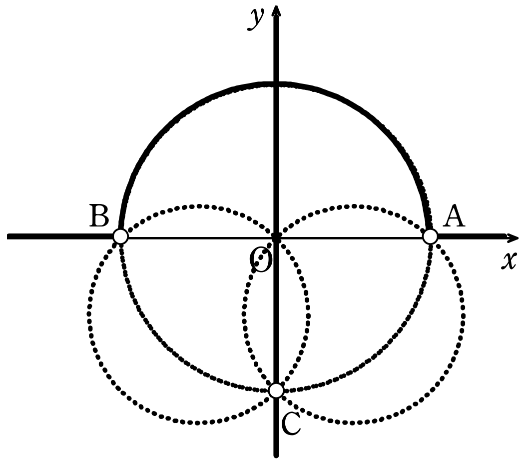
2 で割って $x\{(a+y)^2+x^2-(a+y)(a+1)\}=0$

$$\Leftrightarrow x(ay-a+y^2+x^2-y)=0$$

$$\Leftrightarrow x(ay-a+a-y)=0$$

$$\Leftrightarrow xy(a-1)=0$$

$$\Leftrightarrow xy(x^2+y^2-1)=0$$



④より P は，2 円 $x^2+y^2-x+y=0$，$x^2+y^2+x+y=0$ 双方の内部か双方の外部（周を含む）にあるので，答えは図の太線部分（○を除く）。

[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{4}$]

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = p,\ b_1 = p+1 \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次に 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np\ ,\ \ b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2) p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。

(1) n に関する帰納法で示す。

$$c_n = a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np$$

$$d_n = b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

とおくと，$c_1 = a_1 - p = 0$，$d_1 = b_1 - p - 1 = 0$ であるから $n=1$ のとき題意は成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つとすると，$c_k,\ d_k$ は p^3 の倍数で

$$c_{k+1} = a_{k+1} - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p$$

$$= a_k + pb_k - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p$$

$$a_k = c_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp,\ \ b_k = d_k + k(k-1)p^2 + kp + 1 \ \ \text{より}$$

$$c_{k+1} = \left\{c_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp\right\} + p\left\{d_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\right\} - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p$$

$$= c_k + pd_k + k(k-1)p^3$$

であるから c_{k+1} は p^3 の倍数である。

$$d_{k+1} = b_{k+1} - (k+1)kp^2 - (k+1) - 1$$

$$= pa_k + (p+1)b_k - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1$$

$$= p\left\{c_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp\right\} + (p+1)\left\{d_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\right\} - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1$$

$$= pc_k + (p+1)d_k + \frac{k(k-1)}{2}p^3 + k(k-1)p^3$$

連続する整数 $k, k-1$ の一方は偶数であるから $\dfrac{k(k-1)}{2}$ は整数となり，d_{k+1} は p^3 の倍数。

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

したがって帰納的に題意は成り立つ。

(2) $a_p = c_p + \dfrac{p(p-1)}{2}p^2 + p\cdot p$

$$= c_p + \frac{p-1}{2}p^3 + p^2$$

(1)より c_p は p^3 の倍数であり，また p は奇数であるから $\dfrac{p-1}{2}$ は整数なので

$\dfrac{p-1}{2}p^3$ は p^3 の倍数である。

一方，p^2 は p^3 の倍数でないから，題意は示された。