[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{4}$]

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = p,\ b_1 = p+1 \\ a_{n+1} = a_n + pb_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次に 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np\ ,\ \ b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2) p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。

(1) n に関する帰納法で示す。

$$c_n = a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np$$

$$d_n = b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

とおくと，$c_1 = a_1 - p = 0$，$d_1 = b_1 - p - 1 = 0$ であるから $n=1$ のとき題意は成り立つ。

$n=k$ のとき成り立つとすると，$c_k,\ d_k$ は p^3 の倍数で

$$c_{k+1} = a_{k+1} - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p$$

$$= a_k + pb_k - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p$$

$$a_k = c_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp,\ \ b_k = d_k + k(k-1)p^2 + kp + 1$$ より

$$c_{k+1} = \left\{c_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp\right\} + p\left\{d_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\right\} - \frac{(k+1)k}{2}p^2 - (k+1)p$$

$$= c_k + pd_k + k(k-1)p^3$$

であるから c_{k+1} は p^3 の倍数である。

$$d_{k+1} = b_{k+1} - (k+1)kp^2 - (k+1) - 1$$

$$= pa_k + (p+1)b_k - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1$$

$$= p\left\{c_k + \frac{k(k-1)}{2}p^2 + kp\right\} + (p+1)\left\{d_k + k(k-1)p^2 + kp + 1\right\} - (k+1)kp^2 - (k+1)p - 1$$

$$= pc_k + (p+1)d_k + \frac{k(k-1)}{2}p^3 + k(k-1)p^3$$

連続する整数 $k, k-1$ の一方は偶数であるから $\dfrac{k(k-1)}{2}$ は整数となり，d_{k+1} は p^3 の倍数。

よって $n = k+1$ のときも成り立つ。

したがって帰納的に題意は成り立つ。

(2) $a_p = c_p + \dfrac{p(p-1)}{2}p^2 + p \cdot p$

$$= c_p + \frac{p-1}{2}p^3 + p^2$$

(1)より c_p は p^3 の倍数であり，また p は奇数であるから $\dfrac{p-1}{2}$ は整数なので

$\dfrac{p-1}{2}p^3$ は p^3 の倍数である。

一方，p^2 は p^3 の倍数でないから，題意は示された。