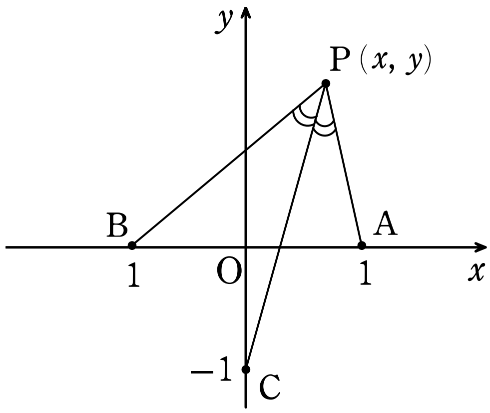
[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{3}$]

座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(-1,0)$, $\mathrm{C}(0,-1)$ に対し，$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし $\mathrm{P}\neq\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ とする。



$\mathrm{P}(x,y)$ とおくと，$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$

$$\Leftrightarrow\ \cos\angle\mathrm{APC}=\cos\angle\mathrm{BPC}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\times|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\times|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\ \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(1-x,-y)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(-x,-1-y)$ より

①は $(x^2+y^2-x+y)\sqrt{x^2+y^2+2x+1}=(x^2+y^2+x+y)\sqrt{x^2+y^2-2x+1}\ \cdots ②$

$x^2+y^2=a$ とおくと，②は $(a-x+y)\sqrt{a+2x+1}=(a+x+y)\sqrt{a-2x+1}$

$$\Leftrightarrow\ (a-x+y)^2(a+2x+1)=(a+x+y)^2(a-2x+1)\ \cdots ③$$

かつ $a-x+y$ と $a+x+y$ が同符号（0 を含む）…④

③より $\{(a+y)^2-2x(a+y)+x^2\}(a+2x+1)=\{(a+y)^2-2x(a+y)+x^2\}(a-2x+1)$

$(a+y)^2+x^2=A,\ 2x(a+y)=B,\ a+1=C,\ 2x=D$ とおくと

$(A-B)(C+D)=(A+B)(C-D)\ \Leftrightarrow\ AD-BC=0$

よって $\{(a+y)^2+x^2\}\cdot 2x-2x(a+y)(a+1)=0$

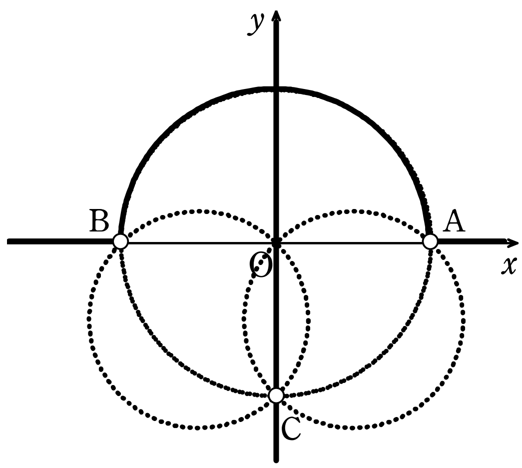
2 で割って $x\{(a+y)^2+x^2-(a+y)(a+1)\}=0$

$$\Leftrightarrow\ x(ay-a+y^2+x^2-y)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x(ay-a+a-y)=0$$

$$\Leftrightarrow\ xy(a-1)=0$$

$$\Leftrightarrow\ xy(x^2+y^2-1)=0$$



④より P は，2 円 $x^2+y^2-x+y=0$，$x^2+y^2+x+y=0$ 双方の内部か双方の外部（周を含む）にあるので，答えは図の太線部分（○を除く）。