[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{1}$]

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ をみたす実数 α, β と，2 次式 $f(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ について，$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \{x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\}\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left(x^2 + \alpha\beta\right) dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \alpha\beta\right)$$

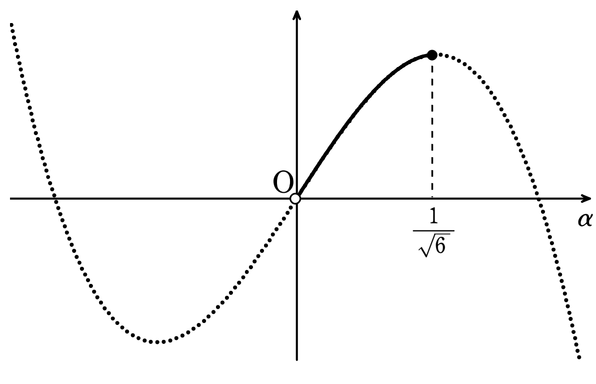
$2\left(\frac{1}{3} + \alpha\beta\right) = 1$ より $\alpha\beta = \frac{1}{6}$ …①

よって $S = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha+\beta}{2}x^2 + \alpha\beta x\right]_0^{\alpha}$

$$= -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha \cdot \alpha\beta$$

$$= -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{1}{6}$$

$$= -\frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{12}\alpha$$



このとき $S' = -\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{1}{6}\right)$

①と $0 \leqq \alpha \leqq \beta$ より $0 < \alpha \leqq \frac{1}{6\alpha}$ なので $0 < \alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}$

よって $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ で最大値 $-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6\sqrt{6}} + \frac{1}{12\sqrt{6}} = \frac{1}{18\sqrt{6}}$ をとる。