[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{1}$]

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ をみたす実数 α, β と，2 次式 $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ について，$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ。

[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{2}$]

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手元にもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A) 手持ちの 4 枚の中から 1 枚を，確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の問(1)，(2)に答えよ。

(1) 操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{3}$]

座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}(-1,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ -1)$ に対し，$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ をみたす点 P の軌跡を求めよ。ただし $\mathrm{P}\neq\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ とする。

[東京大学 2008 年前期 文科 $\boxed{4}$]

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$を考える。

$$\begin{cases} a_1 = p,\ b_1 = p+1 \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次に 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np\ ,\quad b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2) p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。