[東京大学 2007 年後期 $\boxed{1}$]

xy 平面の曲線 $C: xy^2=4$ 上に 1 点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$（$y_0>0$）をとる。

P_0 における C の接線と C との共有点のうち，P_0 と異なるものを $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ とする。

また P_1 における C の接線と C との共有点のうち，P_1 と異なるものを $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。

次の問に答えよ。

(1) $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ の座標を y_0 を用いて表せ。

(2) $\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の面積を T とし，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ および曲線 C で囲まれた領域の面積を S とする。

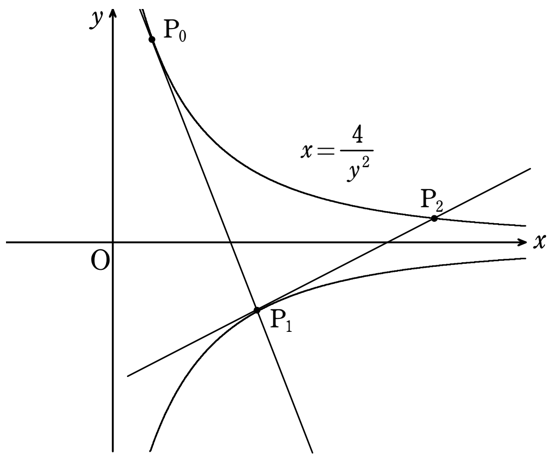
$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ。

(3) $\angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ が直角となるような y_0 の値を求めよ。

(4) 前問(3)で求めた y_0 に対し，$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の外接円の面積を求めよ。

---

(1) $x=\dfrac{4}{y^2}=f(y)$ とおくと，$f'(y)=-\dfrac{8}{y^3}$ より



P_0 における接線の方程式は $x-\dfrac{4}{{y_0}^2}=-\dfrac{8}{{y_0}^3}(y-y_0)$

これと $x=f(y)$ の交点は

$$\frac{4}{y^2}-\frac{4}{{y_0}^2}=-\frac{8}{{y_0}^3}(y-y_0)\quad \text{より}$$

$$y_0\left({y_0}^2-y^2\right)=-2y^2(y-y_0)$$

$$\Leftrightarrow\ (y-y_0)^2(2y+y_0)=0$$

$y\neq y_0$ より $y_1=-\dfrac{y_0}{2}$ である。

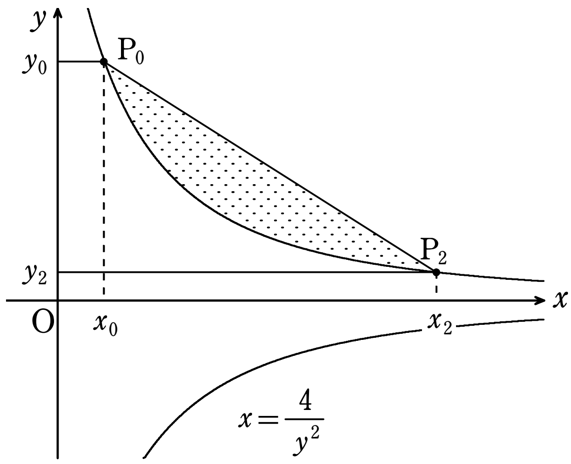
したがって $x_1=\dfrac{4}{{y_1}^2}=\dfrac{16}{{y_0}^2}$ となり，$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{16}{{y_0}^2},\ -\dfrac{y_0}{2}\right)$

同様にして $y_2=-\dfrac{y_1}{2}=\dfrac{y_0}{4}$，$x_2=\dfrac{4}{{y_2}^2}=\dfrac{64}{{y_0}^2}$ となるので $\mathrm{P}_2\left(\dfrac{64}{{y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{4}\right)$

(2) (1)より　$x_1=4x_0$，　$x_2=4x_1=16x_0$，　$y_1=-\dfrac{y_0}{2}$，　$y_2=-\dfrac{y_1}{2}=\dfrac{y_0}{4}$　が成り立つ。

よって　$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}=\begin{pmatrix} x_0-x_1 \\ y_0-y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3x_0 \\ \dfrac{3}{2}y_0 \end{pmatrix}$，

$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x_0 \\ \dfrac{3}{4}y_0 \end{pmatrix}$　となり，



$x_0,\,y_0>0$　なので

$$T=\frac{1}{2}\left|-3x_0\cdot\frac{3}{4}y_0-\frac{3}{2}y_0\cdot 12x_0\right|=\frac{81}{8}x_0y_0=\frac{81}{2y_0}$$

である。

ここで，線分$\mathrm{P_0P_2}$とCで囲まれる部分の面積をUとすると，$S=T-U$　であり，

$$U=\frac{x_0+x_2}{2}(y_0-y_2)-\int_{y_2}^{y_0}\frac{4}{y^2}dy$$

$$=\frac{17x_0}{2}\cdot\frac{3y_0}{4}+\left[\frac{4}{y}\right]_{y_2}^{y_0}$$

$$=\frac{51}{8}x_0y_0+4\left(\frac{1}{y_0}-\frac{1}{y_2}\right)$$

$$=\frac{51}{2y_0}-\frac{12}{y_0}$$

$$=\frac{27}{2y_0}$$

となる。

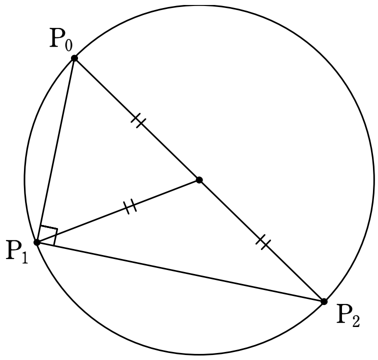
よって，$T:U=3:1$　であり，$\dfrac{T}{S}=\dfrac{T}{T-U}=\dfrac{3}{2}$

(3) 接線はx軸に平行ではないので，2 接線か直交するとき，それらの直線の傾きの積は-1である。

よって，　$f'(y_0)f'(y_1)=\dfrac{64}{{y_0}^3{y_1}^3}=-1$　より　$y_0y_1=-4$

$y_1=-\dfrac{y_0}{2}$　より　$-\dfrac{{y_0}^2}{2}=-4$　と　$y_0>0$　より　$y_0=2\sqrt{2}$

（4） $y_0 = 2\sqrt{2}$ より $x_0 = \dfrac{1}{2}$ である。



このとき，$\overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15x_0 \\ -\dfrac{3}{4}y_0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ であるから

$|\overrightarrow{P_0P_2}|^2 = \dfrac{225+18}{4} = \dfrac{243}{4}$ となる。

よって外接円の面積は $\pi\left(\dfrac{|\overrightarrow{P_0P_2}|}{2}\right)^2 = \dfrac{243}{16}\pi$

[東京大学 2007 年後期 $\boxed{2}$]

次の問に答えよ。

(1) 実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(a^2+b^2\neq 0)$ に対し,

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

とおく。行列 B は $B=\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形であることを示し, $r+t,\ rt-s^2$ を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ。

(2) 前問(1)において $r^2+s^2\geqq a^2+b^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 実数 $a_n,\ b_n,\ c_n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める。

$n=0$ のとき $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$n\geqq 1$ のとき $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$

(ア) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=0$ を示せ。

(イ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n,\ \lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

---

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ より

$$B=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ 0 & ac-b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^3+2ab^2+b^2c & b(ac-b^2) \\ b(ac-b^2) & a(ac-b^2) \end{pmatrix}$$

であるから $r=\dfrac{a^3+2ab^2+b^2c}{a^2+b^2},\ s=\dfrac{b(ac-b^2)}{a^2+b^2},\ t=\dfrac{a(ac-b^2)}{a^2+b^2}$

とおくと，$B=\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ と表せる。

このとき，$r+t=\dfrac{a^3+2ab^2+b^2c}{a^2+b^2}+\dfrac{a(ac-b^2)}{a^2+b^2}$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a+c)}{a^2+b^2}$$

$$=a+c$$

$$rt-s^2=\frac{a^3+2ab^2+b^2c}{a^2+b^2}\cdot\frac{a(ac-b^2)}{a^2+b^2}-\left\{\frac{b(ac-b^2)}{a^2+b^2}\right\}^2$$

$$=\frac{(a^4+2a^2b^2+ab^2c)(ac-b^2)}{(a^2+b^2)^2}-\frac{b^2(ac-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{ac-b^2}{(a^2+b^2)^2}\left\{a^4+2a^2b^2+ab^2c-(ab^2c-b^4)\right\}$$

$$=\frac{ac-b^2}{(a^2+b^2)^2}(a^2+b^2)^2$$

$$=ac-b^2$$

となる。

(2) $a+c=r+t=p$ とおく。

$rt-s^2=r(p-r)-s^2=rp-(r^2+s^2)$

$ac-b^2=a(p-a)-b^2=ap-(a^2+b^2)$

であるから

$$r^2+s^2-(a^2+b^2)=rp-ap$$

$$=r(a+c)-a(r+t)$$

$$=rc-at$$

$$=\frac{a^3c+2ab^2c+b^2c^2-a^2(ac-b^2)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{b^2(a^2+2ac+c^2)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{b^2(a+c)^2}{a^2+b^2}\geqq 0$$

(3) (1)，(2)において $a=a_{n-1}$，$b=b_{n-1}$，$c=c_{n-1}$， $r=a_n$，$s=b_n$，$t=c_n$ とおくと

$a_n+c_n=\cdots=a_0+c_0=3$ …①

$a_nc_n-{b_n}^2=\cdots=a_0c_0-{b_0}^2=1$ …②

${a_n}^2+{b_n}^2\geqq\cdots\geqq{a_0}^2+{b_0}^2=2$ …③

が成り立つ。

(i) $s=\dfrac{b(ac-b^2)}{a^2+b^2}$ であり，

②を利用して $b_n=\dfrac{b_{n-1}(a_{n-1}c_{n-1}-{b_{n-1}}^2)}{{a_{n-1}}^2+{b_{n-1}}^2}=\dfrac{b_{n-1}}{{a_{n-1}}^2+{b_{n-1}}^2}$

③を利用して $|b_n|=\dfrac{|b_{n-1}|}{{a_{n-1}}^2+{b_{n-1}}^2}\leqq\dfrac{1}{2}|b_{n-1}|$

となるので，$0\leqq|b_n|\leqq\dfrac{1}{2}|b_{n-1}|\leqq\cdots\leqq\dfrac{1}{2^n}|b_0|=\dfrac{1}{2^n}$ が成り立つ。

よって，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$ が成り立つ。

(ii) ①，②から c_n を消去すると

${a_n}^2-3a_n+1+{b_n}^2=0$ となるので $a_n=\dfrac{3\pm\sqrt{5-4{b_n}^2}}{2}$ …④ が成り立つ。

③，④，(i)より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ または $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ …⑤

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}{a_n}^2\geqq2$ …⑥

である。⑤のうち，⑥を満たすものを選ぶと

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$， $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=3-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

となる。

[東京大学 2007 年後期 $\boxed{3}$]

N を 2 以上の自然数とする。

$x_1 \leqq \cdots \leqq x_N$ をみたす実数 $x_1, \cdots, x_N$ に対し，実数 k_n，p_n，q_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を次の手続きで定める。

(A) $k_0 = 1,\ p_0 = x_1,\ q_0 = x_N$

(B) n が奇数のとき k_n は $x_i \leqq \dfrac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$ をみたす x_i の個数，$p_n = p_{n-1},\ q_n = q_{n-1}$

(C) n が偶数（$n \geqq 2$）のとき $k_n = k_{n-1},\ p_n = \dfrac{1}{k_n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} x_i,\ q_n = \dfrac{1}{N - k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i$

ただし $k_n = 0$ または $k_n = N$ となったら，その時点で手続きを終了する。

$x_1 < x_N$ であるとき，次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n について $1 \leqq k_n \leqq N - 1$ かつ $x_1 \leqq p_n < q_n \leqq x_N$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数 J_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を $J_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} (x_i - p_n)^2 + \sum_{i=k_n+1}^{N} (x_i - q_n)^2$

と定めると，すべての自然数 n に対して $J_n \leqq J_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) n が十分大きいとき，$J_n = J_{n-1},\ p_n = p_{n-1},\ q_n = q_{n-1},\ k_n = k_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

---

(1) $x_1, \cdots, x_{k_n}$ からなる集合を P_n とする。

（ⅰ）$n = 1$ のとき

$x_1 < x_N$ より $x_1 < \dfrac{x_1 + x_N}{2} = \dfrac{p_0 + q_0}{2} < x_N$ であるから

$x_1 \in P_1,\ x_N \notin P_1$ となり，P_1 の要素の個数は1以上 N 未満，すなわち $1 \leqq k_1 \leqq N - 1$ である。

また，$p_1 = p_0 = x_1,\ q_1 = q_0 = x_N$ より $x_1 \leqq p_1 < q_1 \leqq x_N$ である。

（ⅱ）$n = 2$ のとき

$k_2 = k_1$ より，(ⅰ)から $1 \leqq k_2 \leqq N - 1$ である。

また，$x_1 \leqq \dfrac{1}{k_2}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_2} x_i = p_2 \leqq x_{k_2} \leqq x_{k_2+1} \leqq \dfrac{1}{N - k_2}\sum_{i=k_2+1}^{N} x_i = q_2 \leqq x_N$ であり，

$p_2=q_2$ とすると $x_1=\cdots=x_{k_2}=x_{k_2+1}=\cdots=x_N$ となり，

$x_1<x_N$ に反するので $p_2\neq q_2$，つまり $p_2<q_2$ であるから $x_1\leqq p_2<q_2\leqq x_N$ が成り立つ。

（iii） $n=2m-1,\ 2m$ のときに題意が成り立つと仮定すると

① $n=2m+1$のとき

$p_{2m+1}=p_{2m}$，$q_{2m+1}=q_{2m}$ および $x_1\leqq p_{2m}<q_{2m}\leqq x_N$ から $x_1\leqq p_{2m+1}<q_{2m+1}\leqq x_N$ であり，

これより $x_1\in P_{2m+1},\ x_N\notin P_{2m+1}$ となり，

P_{2m+1} の要素の個数は1以上 N 未満，すなわち $1\leqq k_{2m+1}\leqq N-1$ である。

② $n=2m+2$ のとき

$k_{2m+2}=k_{2m+1}$ より（A）の $1\leqq k_{2m+1}\leqq N-1$ から $1\leqq k_{2m+2}\leqq N-1$ である。

また，$x_1\leqq\dfrac{1}{k_{2m+2}}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_{2m+2}}x_i=p_{2m+2}\leqq x_{k_{2m+2}}\leqq x_{k_{2m+2}+1}\leqq\dfrac{1}{N-k_{2m+2}}\sum_{i=k_{2m+2}+1}^{N}x_i=q_{2m+2}\leqq x_N$

であり，$p_{2m+2}=q_{2m+2}$ とすると $x_1=\cdots=x_{k_{2m+2}}=x_{k_{2m+2}+1}=\cdots=x_N$ となり，

$x_1<x_N$ に反するので $p_{2m+2}\neq q_{2m+2}$，つまり $p_{2m+2}<q_{2m+2}$ であるから

$x_1\leqq p_{2m+2}<q_{2m+2}\leqq x_N$ が成り立つ。

以上，（ｉ）（ⅱ）（iii）と数学的帰納法により，すべての自然数 n について題意は成り立つ。

(2)（ｉ）n が奇数のとき

固定された $p_n=p_{n-1}$，$q_n=q_{n-1}$ $(p_n<q_n)$ に対して

$(x_i-p_n)^2-(x_i-q_n)^2=2(q_n-p_n)\left(x_i-\dfrac{p_n+q_n}{2}\right)$ であるから，

$x_i\leqq\dfrac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2}$ のとき $(x_i-p_n)^2\leqq(x_i-q_n)^2$

$x_i>\dfrac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2}$ のとき $(x_i-p_n)^2>(x_i-q_n)^2$

となる。

よって(B)の手続きにしたがって集合 P_n を定めた場合に J_n は最小となるので

$J_n\leqq J_{n-1}$ が成り立つ。

（ⅱ）n が偶数のとき

固定された $k_n = k_{n-1}$ に対して

$\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n}(x_i - p)^2 = k_n p^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{k_n} x_i\right)p + \cdots$ は $\displaystyle p = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} x_i = p_n$ のとき最小値をとり，

$\displaystyle\sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i - q)^2 = (N-k_n)q^2 - 2\left(\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i\right)q + \cdots$ は $\displaystyle q = \frac{1}{N-k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i = q_n$ のとき最小値をとる。

よって，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n}(x_i - p)^2 + \sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i - q)^2$ は

$\displaystyle p = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} x_i = p_n$，$\displaystyle q = \frac{1}{N-k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i = q_n$ のときにのみ最小値 J_n をとる …（☆）

ので，$J_n \leqq J_{n-1}$ が成り立つ。

(3) k_n, p_n, q_n のとり得る値は有限個だから，(k_n, p_n, q_n) の組の種類も有限個となり，

それから計算される J_n のとり得る値も有限個となる。

よって，(2)より $J_0 \geqq J_1 \geqq J_2 \geqq \cdots$ において $J_{n-1} > J_n$ なる n の数も有限個となり，

十分大きな n に対して $J_n = J_{n+1} = J_{n+2} = J_{n+3} = \cdots$ と，それ以降の J_n の値は一定になる。

この n を奇数 $2m-1$ としてよい。

$n = 2m$ のとき，$J_{2m} = J_{2m-1}$ となるのは，（☆）において最小値を与える p, q が手続きによって

変化しない場合のみで，このとき $p_{2m} = p_{2m-1}, q_{2m} = q_{2m-1}$ が成り立つ。

手続き(B)より $p_{2m-1} = p_{2m-2}$，$q_{2m-1} = q_{2m-2}$，$p_{2m+1} = p_{2m}, q_{2m+1} = q_{2m}$ であるから

$p_{2m+1} = p_{2m} = p_{2m-1} = p_{2m-2}$，$q_{2m+1} = q_{2m} = q_{2m-1} = q_{2m-2}$ が成り立つ。

このとき，$\displaystyle\frac{p_{2m} + q_{2m}}{2} = \frac{p_{2m-2} + q_{2m-2}}{2}$ であるから

$k_{2m+1} = k_{2m-1}$ が成り立ち，手続き(C)より $k_{2m} = k_{2m-1}$ でもあるから

$k_{2m+1} = k_{2m} = k_{2m-1}$ が成り立つ。

よって，帰納的に $n \geqq 2m-1$ において p_n, q_n, k_n は一定となり，

以上から n が十分大きいときは，$J_n = J_{n-1}$，$p_n = p_{n-1}$，$q_n = q_{n-1}$，$k_n = k_{n-1}$ が成り立つ。