[東京大学 2007 年後期 $\boxed{1}$]

xy 平面の曲線 $C: xy^2 = 4$ 上に 1 点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$（$y_0 > 0$）をとる。

P_0 における C の接線と C との共有点のうち，P_0 と異なるものを $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ とする。

また P_1 における C の接線と C との共有点のうち，P_1 と異なるものを $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。

次の問に答えよ。

(1) $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ の座標を y_0 を用いて表せ。

(2) $\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の面積を T とし，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ および曲線 C で囲まれた領域の面積を S とする。

$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ。

(3) $\angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ が直角となるような y_0 の値を求めよ。

(4) 前問(3)で求めた y_0 に対し，$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の外接円の面積を求めよ。

[東京大学 2007 年後期 $\boxed{2}$]

次の問に答えよ。

(1) 実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(a^2+b^2\neq 0)$ に対し,

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

とおく。行列 B は $B=\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形であることを示し, $r+t,\ rt-s^2$ を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ。

(2) 前問(1)において $r^2+s^2 \geqq a^2+b^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 実数 $a_n,\ b_n,\ c_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める。

$n=0$ のとき $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$n \geqq 1$ のとき $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$

(ア) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=0$ を示せ。

(イ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n,\ \lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

[東京大学 2007 年後期 $\boxed{3}$]

N を 2 以上の自然数とする。

$x_1 \leqq \cdots \leqq x_N$ をみたす実数 $x_1, \cdots, x_N$ に対し，実数 k_n，p_n, q_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ を次の手続きで定める。

(A) $k_0=1,\ p_0=x_1,\ q_0=x_N$

(B) n が奇数のとき k_n は $x_i \leqq \dfrac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2}$ をみたす x_i の個数， $p_n=p_{n-1},\ q_n=q_{n-1}$

(C) n が偶数（$n \geqq 2$）のとき $k_n=k_{n-1}$, $p_n=\dfrac{1}{k_n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} x_i,\ q_n=\dfrac{1}{N-k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i$

ただし $k_n=0$ または $k_n=N$ となったら，その時点で手続きを終了する。

$x_1 < x_N$ であるとき，次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n について　$1 \leqq k_n \leqq N-1$　かつ　$x_1 \leqq p_n < q_n \leqq x_N$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数 J_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ を $J_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n}(x_i-p_n)^2+\sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i-q_n)^2$

と定めると，すべての自然数 n に対して $J_n \leqq J_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) n が十分大きいとき， $J_n=J_{n-1},\ p_n=p_{n-1},\ q_n=q_{n-1},\ k_n=k_{n-1}$ が成り立つことを示せ。