[東京大学 2007 年後期 $\boxed{3}$]

N を 2 以上の自然数とする。

$x_1 \leqq \cdots \leqq x_N$ をみたす実数 $x_1, \cdots, x_N$ に対し，実数 k_n, p_n, q_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を次の手続きで定める。

(A) $k_0 = 1,\ p_0 = x_1,\ q_0 = x_N$

(B) n が奇数のとき k_n は $x_i \leqq \dfrac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$ をみたす x_i の個数， $p_n = p_{n-1},\ q_n = q_{n-1}$

(C) n が偶数（$n \geqq 2$）のとき　$k_n = k_{n-1},\ p_n = \dfrac{1}{k_n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} x_i,\ q_n = \dfrac{1}{N - k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i$

ただし $k_n = 0$ または $k_n = N$ となったら，その時点で手続きを終了する。

$x_1 < x_N$ であるとき，次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n について　$1 \leqq k_n \leqq N-1$　かつ　$x_1 \leqq p_n < q_n \leqq x_N$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数 J_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を $J_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_n}(x_i - p_n)^2 + \sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i - q_n)^2$

と定めると，すべての自然数 n に対して $J_n \leqq J_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) n が十分大きいとき， $J_n = J_{n-1},\ p_n = p_{n-1},\ q_n = q_{n-1},\ k_n = k_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

---

(1) $x_1, \cdots, x_{k_n}$ からなる集合を P_n とする。

（ｉ）$n = 1$ のとき

$x_1 < x_N$　より　$x_1 < \dfrac{x_1 + x_N}{2} = \dfrac{p_0 + q_0}{2} < x_N$　であるから

$x_1 \in P_1,\ x_N \notin P_1$　となり， P_1 の要素の個数は1以上 N 未満，すなわち $1 \leqq k_1 \leqq N-1$　である。

また， $p_1 = p_0 = x_1$, $q_1 = q_0 = x_N$　より　$x_1 \leqq p_1 < q_1 \leqq x_N$　である。

（ⅱ）$n = 2$ のとき

$k_2 = k_1$　より，(ｉ)から $1 \leqq k_2 \leqq N-1$　である。

また， $x_1 \leqq \dfrac{1}{k_2}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_2} x_i = p_2 \leqq x_{k_2}$　$\leqq x_{k_2+1} \leqq \dfrac{1}{N - k_2}\displaystyle\sum_{i=k_2+1}^{N} x_i = q_2 \leqq x_N$　であり，

$p_2 = q_2$ とすると $x_1 = \cdots = x_{k_2} = x_{k_2+1} = \cdots = x_N$ となり，

$x_1 < x_N$ に反するので $p_2 \neq q_2$，つまり $p_2 < q_2$ であるから $x_1 \leqq p_2 < q_2 \leqq x_N$ が成り立つ。

（iii）$n = 2m-1,\ 2m$ のときに題意が成り立つと仮定すると

① $n = 2m+1$ のとき

$p_{2m+1} = p_{2m}$，$q_{2m+1} = q_{2m}$ および $x_1 \leqq p_{2m} < q_{2m} \leqq x_N$ から $x_1 \leqq p_{2m+1} < q_{2m+1} \leqq x_N$ であり，

これより $x_1 \in P_{2m+1},\ x_N \notin P_{2m+1}$ となり，

P_{2m+1} の要素の個数は 1 以上 N 未満，すなわち $1 \leqq k_{2m+1} \leqq N-1$ である。

② $n = 2m+2$ のとき

$k_{2m+2} = k_{2m+1}$ より（A）の $1 \leqq k_{2m+1} \leqq N-1$ から $1 \leqq k_{2m+2} \leqq N-1$ である。

また，$x_1 \leqq \dfrac{1}{k_{2m+2}} \displaystyle\sum_{i=1}^{k_{2m+2}} x_i = p_{2m+2} \leqq x_{k_{2m+2}} \leqq x_{k_{2m+2}+1} \leqq \dfrac{1}{N-k_{2m+2}} \displaystyle\sum_{i=k_{2m+2}+1}^{N} x_i = q_{2m+2} \leqq x_N$

であり，$p_{2m+2} = q_{2m+2}$ とすると $x_1 = \cdots = x_{k_{2m+2}} = x_{k_{2m+2}+1} = \cdots = x_N$ となり，

$x_1 < x_N$ に反するので $p_{2m+2} \neq q_{2m+2}$，つまり $p_{2m+2} < q_{2m+2}$ であるから

$x_1 \leqq p_{2m+2} < q_{2m+2} \leqq x_N$ が成り立つ。

以上，（ｉ）（ ii ）（iii）と数学的帰納法により，すべての自然数 n について題意は成り立つ。

(2)（ｉ）n が奇数のとき

固定された $p_n = p_{n-1}$，$q_n = q_{n-1}$ $(p_n < q_n)$ に対して

$(x_i - p_n)^2 - (x_i - q_n)^2 = 2(q_n - p_n)\left(x_i - \dfrac{p_n + q_n}{2}\right)$ であるから，

$x_i \leqq \dfrac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$ のとき $(x_i - p_n)^2 \leqq (x_i - q_n)^2$

$x_i > \dfrac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$ のとき $(x_i - p_n)^2 > (x_i - q_n)^2$

となる。

よって (B) の手続きにしたがって集合 P_n を定めた場合に J_n は最小となるので

$J_n \leqq J_{n-1}$ が成り立つ。

（ⅱ）n が偶数のとき

固定された $k_n = k_{n-1}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{k_n}(x_i - p)^2 = k_n p^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{k_n} x_i\right)p + \cdots$$ は $p = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} x_i = p_n$ のとき最小値をとり，

$$\sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i - q)^2 = (N - k_n)q^2 - 2\left(\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i\right)q + \cdots$$ は $q = \frac{1}{N-k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i = q_n$ のとき最小値をとる。

よって，$\sum_{i=1}^{k_n}(x_i - p)^2 + \sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i - q)^2$ は

$p = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} x_i = p_n$，$q = \frac{1}{N-k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i = q_n$ のときにのみ最小値 J_n をとる …（☆）

ので，$J_n \geqq J_{n-1}$ が成り立つ。

(3) k_n, p_n, q_n のとり得る値は有限個だから，(k_n, p_n, q_n) の組の種類も有限個となり，

それから計算される J_n のとり得る値も有限個となる。

よって，(2)より $J_0 \geqq J_1 \geqq J_2 \geqq \cdots$ において $J_{n-1} > J_n$ なる n の数も有限個となり，

十分大きな n に対して $J_n = J_{n+1} = J_{n+2} = J_{n+3} = \cdots$ と，それ以降の J_n の値は一定になる。

この n を奇数 $2m-1$ としてよい。

$n = 2m$ のとき，$J_{2m} = J_{2m-1}$ となるのは，（☆）において最小値を与える p, q が手続きによって

変化しない場合のみで，このとき $p_{2m} = p_{2m-1}, q_{2m} = q_{2m-1}$ が成り立つ。

手続き(B)より $p_{2m-1} = p_{2m-2}$，$q_{2m-1} = q_{2m-2}$，$p_{2m+1} = p_{2m}, q_{2m+1} = q_{2m}$ であるから

$p_{2m+1} = p_{2m} = p_{2m-1} = p_{2m-2}$，$q_{2m+1} = q_{2m} = q_{2m-1} = q_{2m-2}$ が成り立つ。

このとき，$\frac{p_{2m} + q_{2m}}{2} = \frac{p_{2m-2} + q_{2m-2}}{2}$ であるから

$k_{2m+1} = k_{2m-1}$ が成り立ち，手続き(C)より $k_{2m} = k_{2m-1}$ でもあるから

$k_{2m+1} = k_{2m} = k_{2m-1}$ が成り立つ。

よって，帰納的に $n \geqq 2m-1$ において p_n, q_n, k_n は一定となり，

以上から n が十分大きいときは，$J_n = J_{n-1}$，$p_n = p_{n-1}$，$q_n = q_{n-1}$，$k_n = k_{n-1}$ が成り立つ。