[東京大学 2007 年後期 $\boxed{3}$]

N を 2 以上の自然数とする。

$x_1 \leqq \cdots \leqq x_N$ をみたす実数 $x_1, \cdots, x_N$ に対し，実数 k_n，p_n，q_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を次の手続きで定める。

(A) $k_0 = 1,\ p_0 = x_1,\ q_0 = x_N$

(B) n が奇数のとき k_n は $x_i \leqq \dfrac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}$ をみたす x_i の個数， $p_n = p_{n-1},\ q_n = q_{n-1}$

(C) n が偶数（$n \geqq 2$）のとき $k_n = k_{n-1},\ p_n = \dfrac{1}{k_n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} x_i,\ q_n = \dfrac{1}{N - k_n}\displaystyle\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i$

ただし $k_n = 0$ または $k_n = N$ となったら，その時点で手続きを終了する。

$x_1 < x_N$ であるとき，次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n について $1 \leqq k_n \leqq N - 1$ かつ $x_1 \leqq p_n < q_n \leqq x_N$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数 J_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を $J_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k_n} (x_i - p_n)^2 + \sum_{i=k_n+1}^{N} (x_i - q_n)^2$

と定めると，すべての自然数 n に対して $J_n \leqq J_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) n が十分大きいとき， $J_n = J_{n-1},\ p_n = p_{n-1},\ q_n = q_{n-1},\ k_n = k_{n-1}$ が成り立つことを示せ。