[東京大学 2007 年後期 $\boxed{2}$]

次の問に答えよ。

(1) 実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(a^2+b^2\neq 0)$ に対し,

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

とおく。行列 B は $B=\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形であることを示し, $r+t,\ rt-s^2$ を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ。

(2) 前問(1)において $r^2+s^2\geqq a^2+b^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 実数 $a_n,\ b_n,\ c_n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める。

$n=0$ のとき $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$n\geqq 1$ のとき $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$

(ア) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=0$ を示せ。

(イ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n,\ \lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

---

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ より

$$B=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+bc \\ 0 & ac-b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^3+2ab^2+b^2c & b(ac-b^2) \\ b(ac-b^2) & a(ac-b^2) \end{pmatrix}$$

であるから $r=\dfrac{a^3+2ab^2+b^2c}{a^2+b^2},\ s=\dfrac{b(ac-b^2)}{a^2+b^2},\ t=\dfrac{a(ac-b^2)}{a^2+b^2}$

とおくと，$B=\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ と表せる。

このとき，$r+t=\dfrac{a^3+2ab^2+b^2c}{a^2+b^2}+\dfrac{a(ac-b^2)}{a^2+b^2}$

$$=\frac{(a^2+b^2)(a+c)}{a^2+b^2}$$

$$=a+c$$

$$rt-s^2=\frac{a^3+2ab^2+b^2c}{a^2+b^2}\cdot\frac{a(ac-b^2)}{a^2+b^2}-\left\{\frac{b(ac-b^2)}{a^2+b^2}\right\}^2$$

$$=\frac{(a^4+2a^2b^2+ab^2c)(ac-b^2)}{(a^2+b^2)^2}-\frac{b^2(ac-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{ac-b^2}{(a^2+b^2)^2}\left\{a^4+2a^2b^2+ab^2c-(ab^2c-b^4)\right\}$$

$$=\frac{ac-b^2}{(a^2+b^2)^2}(a^2+b^2)^2$$

$$=ac-b^2$$

となる。

(2) $a+c=r+t=p$ とおく。

$$rt-s^2=r(p-r)-s^2=rp-(r^2+s^2)$$

$$ac-b^2=a(p-a)-b^2=ap-(a^2+b^2)$$

であるから

$$r^2+s^2-(a^2+b^2)=rp-ap$$

$$=r(a+c)-a(r+t)$$

$$=rc-at$$

$$=\frac{a^3c+2ab^2c+b^2c^2-a^2(ac-b^2)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{b^2(a^2+2ac+c^2)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{b^2(a+c)^2}{a^2+b^2}\geqq 0$$

(3) (1), (2)において $a=a_{n-1}$, $b=b_{n-1}$, $c=c_{n-1}$, $r=a_n$, $s=b_n$, $t=c_n$ とおくと

$a_n+c_n=\cdots=a_0+c_0=3$ …①

$a_nc_n-{b_n}^2=\cdots=a_0c_0-{b_0}^2=1$ …②

${a_n}^2+{b_n}^2\geqq\cdots\geqq{a_0}^2+{b_0}^2=2$ …③

が成り立つ。

（ⅰ）$s=\dfrac{b(ac-b^2)}{a^2+b^2}$ であり,

②を利用して $b_n=\dfrac{b_{n-1}(a_{n-1}c_{n-1}-{b_{n-1}}^2)}{{a_{n-1}}^2+{b_{n-1}}^2}=\dfrac{b_{n-1}}{{a_{n-1}}^2+{b_{n-1}}^2}$

③を利用して $|b_n|=\dfrac{|b_{n-1}|}{{a_{n-1}}^2+{b_{n-1}}^2}\leqq\dfrac{1}{2}|b_{n-1}|$

となるので, $0\leqq|b_n|\leqq\dfrac{1}{2}|b_{n-1}|\leqq\cdots\leqq\dfrac{1}{2^n}|b_0|=\dfrac{1}{2^n}$ が成り立つ。

よって，はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ が成り立つ。

（ⅱ）①, ②から c_n を消去すると

${a_n}^2-3a_n+1+{b_n}^2=0$ となるので $a_n=\dfrac{3\pm\sqrt{5-4{b_n}^2}}{2}$ …④ が成り立つ。

③, ④, (ⅰ)より $\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ または $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ …⑤

$\lim_{n\to\infty}{a_n}^2\geqq2$ …⑥

である。⑤のうち, ⑥を満たすものを選ぶと

$\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lim_{n\to\infty}c_n=3-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

となる。