[東京大学 2007 年後期 $\boxed{1}$]

xy 平面の曲線 $C : xy^2 = 4$ 上に 1 点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$（ $y_0 > 0$ ）をとる。

P_0 における C の接線と C との共有点のうち，P_0 と異なるものを $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ とする。

また P_1 における C の接線と C との共有点のうち，P_1 と異なるものを $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。

次の問に答えよ。

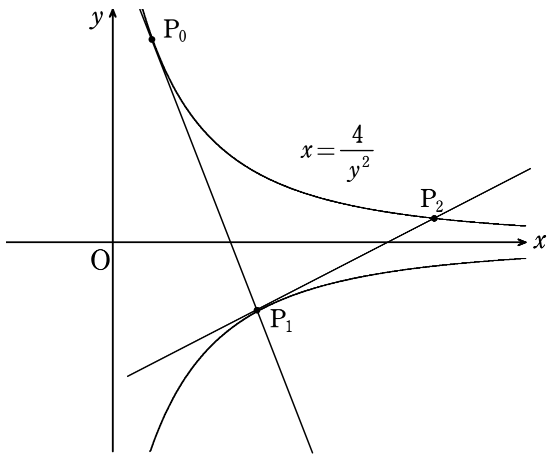
(1) $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ の座標を y_0 を用いて表せ。

(2) $\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の面積を T とし，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ および曲線 C で囲まれた領域の面積を S とする。

$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ。

(3) $\angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ が直角となるような y_0 の値を求めよ。

(4) 前問(3)で求めた y_0 に対し，$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の外接円の面積を求めよ。



(1) $x = \dfrac{4}{y^2} = f(y)$ とおくと，$f'(y) = -\dfrac{8}{y^3}$ より

P_0 における接線の方程式は $x - \dfrac{4}{{y_0}^2} = -\dfrac{8}{{y_0}^3}(y - y_0)$

これと $x = f(y)$ の交点は

$\dfrac{4}{y^2} - \dfrac{4}{{y_0}^2} = -\dfrac{8}{{y_0}^3}(y - y_0)$ より

$y_0\left({y_0}^2 - y^2\right) = -2y^2(y - y_0)$

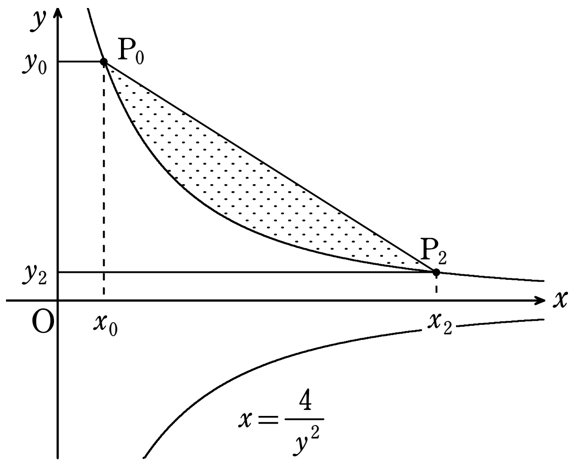
$\Leftrightarrow$ $(y - y_0)^2(2y + y_0) = 0$

$y \neq y_0$ より $y_1 = -\dfrac{y_0}{2}$ である。

したがって $x_1 = \dfrac{4}{{y_1}^2} = \dfrac{16}{{y_0}^2}$ となり，$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{16}{{y_0}^2}, -\dfrac{y_0}{2}\right)$

同様にして $y_2 = -\dfrac{y_1}{2} = \dfrac{y_0}{4}$，$x_2 = \dfrac{4}{{y_2}^2} = \dfrac{64}{{y_0}^2}$ となるので $\mathrm{P}_2\left(\dfrac{64}{{y_0}^2}, \dfrac{y_0}{4}\right)$

(2) (1)より　$x_1=4x_0$，$x_2=4x_1=16x_0$，$y_1=-\dfrac{y_0}{2}$，$y_2=-\dfrac{y_1}{2}=\dfrac{y_0}{4}$　が成り立つ。



よって　$\overrightarrow{P_0P_1}=\begin{pmatrix} x_0-x_1 \\ y_0-y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3x_0 \\ \dfrac{3}{2}y_0 \end{pmatrix}$,

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x_0 \\ \dfrac{3}{4}y_0 \end{pmatrix}$$ となり，

$x_0, y_0>0$　なので

$$T=\frac{1}{2}\left|-3x_0\cdot\frac{3}{4}y_0-\frac{3}{2}y_0\cdot 12x_0\right|=\frac{81}{8}x_0y_0=\frac{81}{2y_0}$$

である。

ここで，線分 P_0P_2 と C で囲まれる部分の面積を U とすると，$S=T-U$　であり，

$$U=\frac{x_0+x_2}{2}(y_0-y_2)-\int_{y_2}^{y_0}\frac{4}{y^2}dy$$

$$=\frac{17x_0}{2}\cdot\frac{3y_0}{4}+\left[\frac{4}{y}\right]_{y_2}^{y_0}$$

$$=\frac{51}{8}x_0y_0+4\left(\frac{1}{y_0}-\frac{1}{y_2}\right)$$

$$=\frac{51}{2y_0}-\frac{12}{y_0}$$

$$=\frac{27}{2y_0}$$

となる。

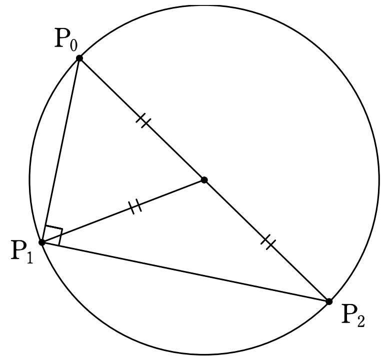
よって，$T:U=3:1$　であり，$\dfrac{T}{S}=\dfrac{T}{T-U}=\dfrac{3}{2}$

(3) 接線は x 軸に平行ではないので，2 接線か直交するとき，それらの直線の傾きの積は -1 である。

よって，$f'(y_0)f'(y_1)=\dfrac{64}{{y_0}^3{y_1}^3}=-1$　より　$y_0y_1=-4$

$y_1=-\dfrac{y_0}{2}$　より　$-\dfrac{{y_0}^2}{2}=-4$　と　$y_0>0$　より　$y_0=2\sqrt{2}$

(4) $y_0=2\sqrt{2}$ より $x_0=\dfrac{1}{2}$ である。



このとき，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}=\begin{pmatrix} x_2-x_0 \\ y_2-y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15x_0 \\ -\dfrac{3}{4}y_0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}|^2=\dfrac{225+18}{4}=\dfrac{243}{4}$ となる。

よって外接円の面積は $\pi\left(\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}|}{2}\right)^2=\dfrac{243}{16}\pi$