[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{1}$]

n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 次以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数であることを示せ。

ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

$P(x)$ の x^j の係数を a_j とおき，j（$0 \leqq j \leqq n$）についての帰納法で示す。

$$(1+x)^k P(x) = \left(1 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k\right) \times \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_j x^j + \cdots + a_n x^n + \cdots\right) \quad \cdots ①$$

①の x^j の係数を b_j とおくと，b_j（$0 \leqq j \leqq n$）は整数。

（ｉ）①の定数項のついて $a_0 = b_0$ であるから，a_0 は整数。

（ⅱ）①の x^j（$1 \leqq j \leqq n$）の係数について，

$$a_j + {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} + {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} + \cdots + {}_k\mathrm{C}_j a_0 = b_j \quad （k < \ell \text{ のときは } {}_k\mathrm{C}_\ell = 0 \text{ とみなす}）$$

よって $a_j = b_j - {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} - {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} - \cdots - {}_k\mathrm{C}_j a_0$ となる。

したがって $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{j-1}$ が整数であるならば a_j も整数。

（ｉ），（ⅱ）より帰納的に a_j（$0 \leqq j \leqq n$）は整数。

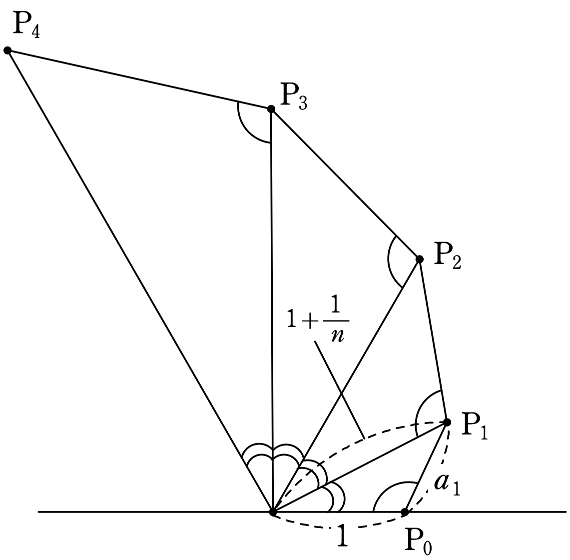
[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{2}$]

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 $\mathrm{O},\ \mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \cdots,\ \mathrm{P}_n$ があり，次の 2 つの条件をみたしている。

① $\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k = \dfrac{\pi}{n}\ (1 \leqq k \leqq n)$, $\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k = \angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1\ (2 \leqq k \leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし， $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。



$\triangle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1 \backsim \triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2 \backsim \triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{P}_3 \backsim \cdots$ より

$\mathrm{OP}_0 : \mathrm{OP}_1 = \mathrm{OP}_1 : \mathrm{OP}_2 = \mathrm{OP}_2 : \mathrm{OP}_3 = \cdots$ であるから，

隣り合った三角形の相似比は $\mathrm{OP}_0 : \mathrm{OP}_1 = 1 : \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

よって，$\{a_k\}$ は公比 $1+\dfrac{1}{n}$ の等比数列である。

余弦定理より

$$a_1{}^2 = a + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$$

であるから

$$s_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1}\cdot a_1$$

$$= \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}\cdot\frac{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n}}$$

ここで，$\dfrac{1}{n} = u$ とおくと

$$\frac{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{1+\left(1+u\right)^2-2\left(1+u\right)\cos\pi u}}{u}$$

$$=\frac{\sqrt{u^2+2(1+u)\left(1-\cos\pi u\right)}}{u}$$

$$=\sqrt{1+2(1+u)\frac{\sin^2\pi u}{1+\cos\pi u}\cdot\frac{1}{u^2}}$$

$$=\sqrt{1+2(1+u)\frac{1}{1+\cos\pi u}\cdot\left(\frac{\sin\pi u}{\pi u}\right)^2\cdot\pi^2}$$

$\to\sqrt{1+\pi^2}$ （$n\to\infty$ のとき $u\to 0$ なので）

よって $\lim_{n\to\infty}s_n=(e-1)\sqrt{1+\pi^2}$

[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{3}$]

座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y=x^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を 1 : 2 に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，P = Q のときには R = P とする。

(1) a を $-1\leqq a\leqq 1$ をみたす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。

(1) D は y 軸に関して対称であるから，$a\geqq 0$ のときを考える。

$\mathrm{P}\left(p,\ p^2\right),\ \mathrm{Q}\left(q,\ q^2\right)$ （$-1\leqq p\leqq 1$ …①，$-1\leqq q\leqq 1$ …②）とおくと，

$a=\dfrac{2p+q}{3}$ …③,

$b=\dfrac{2p^2+q^2}{3}$ …④ である。

③ ⇔ $q=3a-2p$ …⑤ を④に代入して

$b=\dfrac{2p^2+(3a-2p)^2}{3}=2p^2-4ap+3a^2$ …⑥

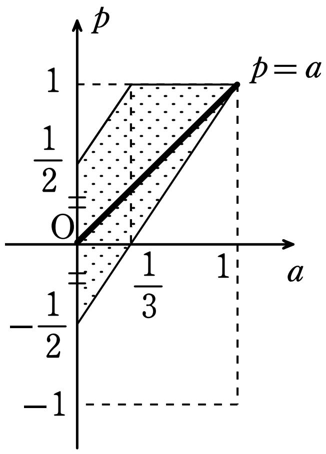
⑤を②に代入して

$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$ ⇔ $\dfrac{3}{2}a-\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq \dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2}$ …⑦

a を固定して p を①かつ⑦の範囲で変化させたときの⑥の範囲を考えればよい。

⑥$=2(p-a)^2+a^2=f(p)$ とおく。

①かつ⑦を a - p 平面に図示すると，図の打点部分 E になる。



$b=f(p)$ の軸 $p=a$ は E に含まれるから，

$f(p)$ は $p=a$ のとき最小値 $f(a)=a^2$ をとる。

また，各 a について，E の境界線の上側の方が軸 $p=a$ から遠いので，

$f(p)$ の最大値は $0\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき $f\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\leqq a\leqq 1$ のとき $f(1)=3a^2-4a+2$

よって，b の条件は

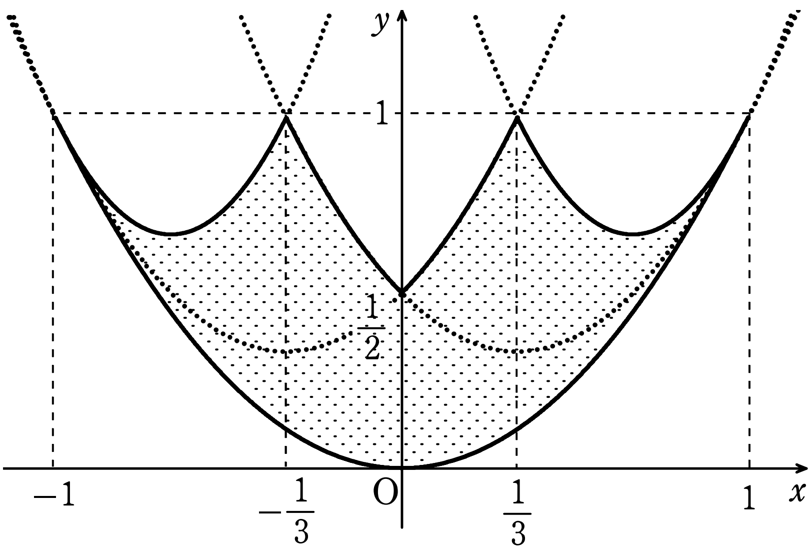
$-1\leqq a\leqq-\frac{1}{3}$ のとき $a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

$-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 0$ のとき $a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

$0\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき $a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\leqq a\leqq 1$ のとき $a^2\leqq b\leqq 3a^2-4a+2$

(2) D は図の打点部分。ただし，境界線上の点も含む。



[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{4}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a に対し，2 次の正方行列 $\mathrm{A}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}$ が 5 つの条件

$$\mathrm{A}=a\mathrm{P}+(a+1)\mathrm{Q},\ \mathrm{P}^2=\mathrm{P},\ \mathrm{Q}^2=\mathrm{Q},\ \mathrm{PQ}=\mathrm{O},\ \mathrm{QP}=\mathrm{O}$$

をみたすとする。ただし， $\mathrm{O}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ である。

このとき，$(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\mathrm{A}=\mathrm{A}$ が成り立つことを示せ。

(2) a は正の数として，行列 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & a+1\end{pmatrix}$ を考える。この A に対し，(1)の 5 つの条件をすべてみたす行列 P, Q を求めよ。

(3) n を 2 以上の整数とし，$2\leqq k\leqq n$ をみたす整数 k に対して $\mathrm{A}_k=\begin{pmatrix}k & 0\\ 1 & k+1\end{pmatrix}$ とおく。

行列の積 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_{n-2}\cdots\mathrm{A}_2$ を求めよ。

$\mathrm{A}=a\mathrm{P}+(a+1)\mathrm{Q}$ …①

$\mathrm{P}^2=\mathrm{P}$ …②，$\mathrm{Q}^2=\mathrm{Q}$ …③，$\mathrm{PQ}=\mathrm{O}$ …④，$\mathrm{QP}=\mathrm{O}$ …⑤

(1) $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\mathrm{A}=(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\{a\mathrm{P}+(a+1)\mathrm{Q}\}$

$$=a\mathrm{P}^2+(a+1)\mathrm{PQ}+a\mathrm{QP}+(a+1)\mathrm{Q}^2$$

$$=a\mathrm{P}+(a+1)\mathrm{Q}$$

$$(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\mathrm{A}=\mathrm{A}\quad\cdots⑥$$

(2) $\det\mathrm{A}=a(a+1)>0$ より A^{-1} が存在するから，

⑥に右から A^{-1} を掛けて，$\mathrm{P}+\mathrm{Q}=\mathrm{E}$ …⑦

また，①より $a\mathrm{P}+(a+1)\mathrm{Q}=\mathrm{A}$ …⑧

⑦$\times(a+1)-$⑧より $\mathrm{P}=(a+1)\mathrm{E}-\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

⑧$-$⑦$\times a$ より $\mathrm{Q}=\mathrm{A}-a\mathrm{E}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

これらは②～⑤を満たしている。

(3) $A_k = kP + (k+1)Q$ であるから

求める積は $\{nP+(n+1)Q\}\{(n-1)P+nQ\}\cdots(2P+3Q)$

これを展開すると，④⑤より P^{n-1}, Q^{n-1} 以外の項はすべて消え，

$$n(n-1)\cdots\cdots 2\cdot P^{n-1} + (n-1)n\cdots\cdots 3Q^{n-1} = n!P^{n-1} + \frac{(n+1)!}{2}Q^{n-1}$$

②③より $P^{n-1} = P$, $Q^{n-1} = Q$ であるから

$$n!P + \frac{(n+1)!}{2}Q = n!\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(n+1)!}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n! & 0 \\ n!\cdot\dfrac{n-1}{2} & \dfrac{(n+1)!}{2} \end{pmatrix}$$

[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{5}$]

表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ のあるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。

この硬貨を投げて，次のルール (R) の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは，最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数，m を $0 \leqq m \leqq n$ をみたす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき，最初にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール (R) の下で，n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

(1)（ i ）$m=n$ のとき

n 回とも表で，$p_n = p^n$

（ ii ）$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

最後の m 回が表で，最後から $m+1$ 回目が裏の場合であるから，

$p_m = (1-p)p^m$

(2)（ i ）$m=n$ のとき

高さは必ず n 以下なので，$q_n = 1$

（ ii ）$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

高さが m より大きくなるのは最後の $m+1$ 回が表の場合であるから

$q_m = 1 - p^{m+1}$

(3) 1 回目が m，2 回目が m 以下になる確率 …①

1 回目が m 以下，2 回目が m になる確率 …②

はそれぞれ $p_m q_m$ であり，①，②には 2 回とも m の場合が重複しているから

$$r_m = 2p_m q_m - {p_m}^2 = p_m(2q_m - p_m)$$

（ｉ）$m = n$ のとき

$$r_n = p^n\left(2 - p^n\right)$$

（ⅱ）$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

$$r_m = (1-p)p^m\left\{2(1-p^{m+1}) - (1-p)p^m\right\}$$

$$= (1-p)p^m\left(2 - p^m - p^{m+1}\right)$$

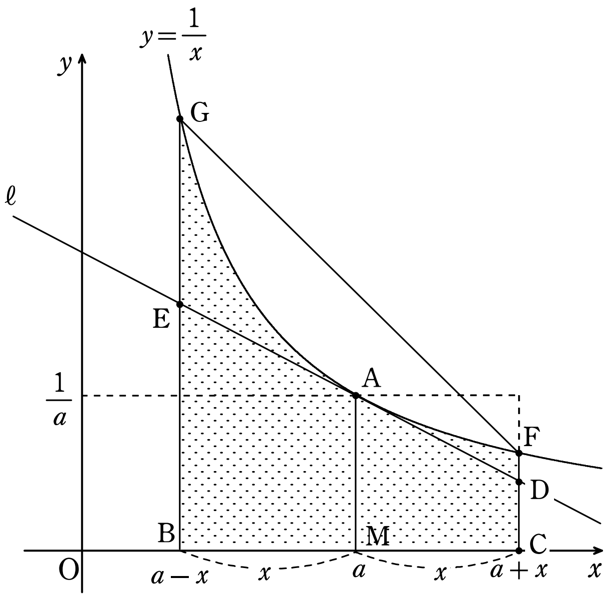
[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{6}$]

(1) $0<x<a$ をみたす実数 x, a に対し，次を示せ。 $\dfrac{2x}{a}<\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$

(2) (1)を利用して，次を示せ。$0.68<\log 2<0.71$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

(1) 図で ℓ は，$\mathrm{A}\left(a,\dfrac{1}{a}\right)$ での接線である。



$y=\dfrac{1}{x}$ は下に凸であるから

（台形 BCDE）$<\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<$（台形 BCFG）

台形 $\mathrm{BCDE}=\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BC}$ に注意して

$$2x\cdot\frac{1}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdot 2x$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2) $\dfrac{2x}{a}<\log\dfrac{a+x}{a-x}<x\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right)$ …① とおく。

$\dfrac{a+x}{a-x}=\sqrt{2}$ のとき，$x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}a=\left(3-2\sqrt{2}\right)a$

①に代入して $2\left(3-2\sqrt{2}\right)<\log\sqrt{2}<\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{1}{4-2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}-2}\right)$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(3-2\sqrt{2}\right)<\frac{1}{2}\log 2<\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot\frac{3\sqrt{2}+4}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ 12-8\sqrt{2}<\log 2<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって，あとは $0.68<12-8\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0.71$ …② であることを示せばよい。

（ⅰ）$0.68<12-8\sqrt{2}$ …③ であること

③ $\Leftrightarrow$ $11.32>8\sqrt{2}$ である。

ここで，$\dfrac{11.32}{8}=1.415$ であり，$1.415^2=2.002\cdots$ より $\dfrac{11.32}{8}>\sqrt{2}$ である。

よって③が成り立つ。

（ⅱ）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0.71$ …④ であること

④ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2}<1.42$ である。$\sqrt{2}=1.41\cdots$ であるから④が成り立つ。

したがって②が成り立ち，題意は示された。

[別解]⑵

⑴より $0<x<a$ をみたす実数 x, a に対し，$\dfrac{2x}{a}<\log\dfrac{a+x}{a-x}<x\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right)$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2x}{a}<\log\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}<\frac{x}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{a}}+\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)$$

$\dfrac{x}{a}=t$ とおくと $2t<\log\dfrac{1+t}{1-t}<t\left(\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{1}{1-t}\right)=\dfrac{2t}{1-t^2}$ …（＊）

$\dfrac{1+t}{1-t}=\sqrt{2}$ とおくと $t=3-2\sqrt{2}$ であり，

このとき（＊）は $2\left(3-2\sqrt{2}\right)<\log\sqrt{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow$ $4\left(3-2\sqrt{2}\right)<\log 2<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …（＊２）となる。

ここで，$\sqrt{2}<1.415 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<2.83 \Leftrightarrow 3-2\sqrt{2}>0.17 \Leftrightarrow 4(3-2\sqrt{2})>0.68$

$\sqrt{2}<1.42 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}<0.71$

であることから（＊２）より題意は示された。