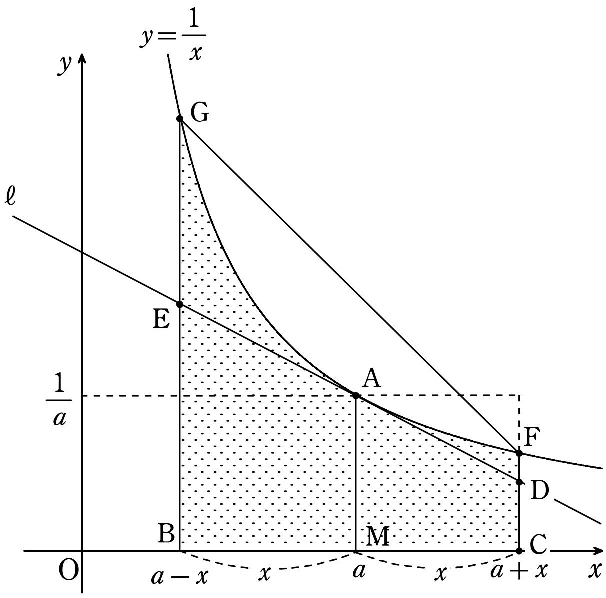
[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{6}$]

(1) $0<x<a$ をみたす実数 $x,\ a$ に対し，次を示せ。 $\dfrac{2x}{a}<\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\dfrac{1}{t}dt<x\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right)$

(2) (1)を利用して，次を示せ。$0.68<\log 2<0.71$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。



(1) 図で ℓ は，$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ での接線である。

$y=\dfrac{1}{x}$ は下に凸であるから

（台形 BCDE）$<\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\dfrac{1}{t}dt<$（台形 BCFG）

台形 $\mathrm{BCDE}=\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BC}$ に注意して

$$2x\cdot\frac{1}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdot 2x$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2) $\dfrac{2x}{a}<\log\dfrac{a+x}{a-x}<x\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right)$ …① とおく。

$\dfrac{a+x}{a-x}=\sqrt{2}$ のとき，$x=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}a=\left(3-2\sqrt{2}\right)a$

①に代入して $2\left(3-2\sqrt{2}\right)<\log\sqrt{2}<\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{1}{4-2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}-2}\right)$

$$\Leftrightarrow\ 2\left(3-2\sqrt{2}\right)<\frac{1}{2}\log 2<\left(3-2\sqrt{2}\right)\cdot\frac{3\sqrt{2}+4}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ 12-8\sqrt{2}<\log 2<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

したがって，あとは $0.68<12-8\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0.71$ …② であることを示せばよい。

（ｉ）$0.68<12-8\sqrt{2}$ …③ であること

③ $\Leftrightarrow$ $11.32>8\sqrt{2}$ である。

ここで，$\dfrac{11.32}{8}=1.415$ であり，$1.415^2=2.002\cdots$ より $\dfrac{11.32}{8}>\sqrt{2}$ である。

よって③が成り立つ。

（ⅱ）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0.71$ …④ であること

④ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2}<1.42$ である。$\sqrt{2}=1.41\cdots$ であるから④が成り立つ。

したがって②が成り立ち，題意は示された。

[別解]（2）

(1)より $0<x<a$ をみたす実数 x, a に対し，$\dfrac{2x}{a}<\log\dfrac{a+x}{a-x}<x\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{a}<\log\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}<\frac{x}{a}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{a}}+\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)$$

$\dfrac{x}{a}=t$ とおくと $2t<\log\dfrac{1+t}{1-t}<t\left(\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{1}{1-t}\right)=\dfrac{2t}{1-t^2}$ …（＊）

$\dfrac{1+t}{1-t}=\sqrt{2}$ とおくと $t=3-2\sqrt{2}$ であり，

このとき（＊）は $2\left(3-2\sqrt{2}\right)<\log\sqrt{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow$ $4\left(3-2\sqrt{2}\right)<\log 2<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …（＊２）となる。

ここで，$\sqrt{2}<1.415 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<2.83 \Leftrightarrow 3-2\sqrt{2}>0.17 \Leftrightarrow 4(3-2\sqrt{2})>0.68$

$\sqrt{2}<1.42 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}<0.71$

であることから（＊２）より題意は示された。