



表が出る確率が p ，裏が出る確率が $1-p$ のあるような硬貨がある。ただし， $0 < p < 1$ とする。

この硬貨を投げて，次のルール (R) の下で，ブロック積みゲームを行う。

- (R) $\left\{ \begin{array}{l} \text{①} \text{ ブロックの高さは，最初は } 0 \text{ とする。} \\ \text{②} \text{ 硬貨を投げて表が出れば高さ } 1 \text{ のブロックを } 1 \text{ つ積み上げ，裏が出ればブロックを} \\ \text{すべて取り除いて高さ } 0 \text{ に戻す。} \end{array} \right.$

n を正の整数， m を $0 \leq m \leq n$ をみたす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき，最初にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1) で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール (R) の下で， n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。

2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。

ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。



(1) (i) $m = n$ のとき

$$n \text{ 回とも表で， } p_n = p^n$$

(ii) $0 \leq m \leq n-1$ のとき

最後の m 回が表で，最後から $m+1$ 回目が裏の場合であるから，

$$p_m = (1-p)p^m$$

(2) (i) $m = n$ のとき

高さは必ず n 以下なので， $q_n = 1$

(ii) $0 \leq m \leq n-1$ のとき

高さが m より大きくなるのは最後の $m+1$ 回が表の場合であるから

$$q_m = 1 - p^{m+1}$$

(3) 1 回目が m , 2 回目が m 以下になる確率 …①

1 回目が m 以下, 2 回目が m になる確率 …②

はそれぞれ $p_m q_m$ であり, ①, ②には 2 回とも m の場合が重複しているから

$$r_m = 2p_m q_m - p_m^2 = p_m(2q_m - p_m)$$

(i) $m = n$ のとき

$$r_n = p^n(2 - p^n)$$

(ii) $0 \leq m \leq n-1$ のとき

$$\begin{aligned} r_m &= (1-p)p^m \{2(1-p^{m+1}) - (1-p)p^m\} \\ &= (1-p)p^m(2 - p^m - p^{m+1}) \end{aligned}$$