[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{4}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a に対し，2 次の正方行列 A, P, Q が 5 つの条件

$$A = aP + (a+1)Q,\ P^2 = P,\ Q^2 = Q,\ PQ = O,\ QP = O$$

をみたすとする。ただし， $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。

このとき，$(P+Q)A = A$ が成り立つことを示せ。

(2) a は正の数として，行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ を考える。この A に対し，(1)の 5 つの条件をすべてみたす行列 P, Q を求めよ。

(3) n を 2 以上の整数とし，$2 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$ とおく。

行列の積 $A_n A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2$ を求めよ。

$A = aP + (a+1)Q$ …①

$P^2 = P$ …②， $Q^2 = Q$ …③， $PQ = O$ …④， $QP = O$ …⑤

(1) $(P+Q)A = (P+Q)\{aP + (a+1)Q\}$

$$= aP^2 + (a+1)PQ + aQP + (a+1)Q^2$$

$$= aP + (a+1)Q$$

$$(P+Q)A = A \quad \cdots⑥$$

(2) $\det A = a(a+1) > 0$ より A^{-1} が存在するから，

⑥に右から A^{-1} を掛けて， $P + Q = E$ …⑦

また，①より $aP + (a+1)Q = A$ …⑧

⑦$\times(a+1) -$⑧より $P = (a+1)E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

⑧$-$⑦$\times a$ より $Q = A - aE = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

これらは②～⑤を満たしている。

(3) $A_k=kP+(k+1)Q$ であるから

求める積は $\{nP+(n+1)Q\}\{(n-1)P+nQ\}\cdots(2P+3Q)$

これを展開すると，④⑤より P^{n-1}, Q^{n-1} 以外の項はすべて消え，

$$n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot P^{n-1}+(n-1)n\cdot\cdots\cdot 3Q^{n-1}=n!P^{n-1}+\frac{(n+1)!}{2}Q^{n-1}$$

②③より $P^{n-1}=P,\ Q^{n-1}=Q$ であるから

$$n!P+\frac{(n+1)!}{2}Q=n!\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\frac{(n+1)!}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}n! & 0\\ n!\cdot\frac{n-1}{2} & \frac{(n+1)!}{2}\end{pmatrix}$$