[ 東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{3}$ ]

座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y=x^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を 1 : 2 に内分する点 R が動く範囲を $D$ とする。ただし，P = Q のときには R = P とする。

(1) $a$ を $-1\leqq a\leqq 1$ をみたす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が $D$ に属するための $b$ の条件を $a$ を用いて表せ。

(2) $D$ を図示せよ。

(1) $D$ は $y$ 軸に関して対称であるから，$a\geqq 0$ のときを考える。

$\mathrm{P}\left(p,\ p^2\right),\ \mathrm{Q}\left(q,\ q^2\right)$（$-1\leqq p\leqq 1$ …①，$-1\leqq q\leqq 1$ …②）とおくと，

$a=\dfrac{2p+q}{3}$ …③,

$b=\dfrac{2p^2+q^2}{3}$ …④ である。

③ ⇔ $q=3a-2p$ …⑤ を④に代入して

$b=\dfrac{2p^2+(3a-2p)^2}{3}=2p^2-4ap+3a^2$ …⑥

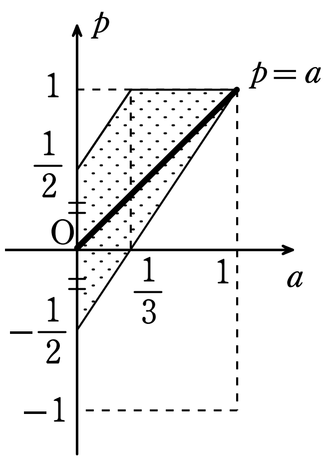
⑤を②に代入して

$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$ ⇔ $\dfrac{3}{2}a-\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq \dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2}$ …⑦

$a$ を固定して $p$ を①かつ⑦の範囲で変化させたときの⑥の範囲を考えればよい。

⑥ $=2(p-a)^2+a^2=f(p)$ とおく。

①かつ⑦を $a$ - $p$ 平面に図示すると，図の打点部分 $E$ になる。



$b=f(p)$ の軸 $p=a$ は $E$ に含まれるから，

$f(p)$ は　$p=a$　のとき最小値　$f(a)=a^2$　をとる。

また，各 $a$ について，$E$ の境界線の上側の方が軸　$p=a$　から遠いので，

$f(p)$ の最大値は　$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$f\left(\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}a^2+a+\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 1$ のとき　$f(1)=3a^2-4a+2$

よって，$b$ の条件は

$-1\leqq a\leqq -\dfrac{1}{3}$　のとき　$a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

$-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 0$　のとき　$a^2\leqq b\leqq \dfrac{3}{2}a^2-a+\dfrac{1}{2}$

$0\leqq a\leqq \dfrac{1}{3}$　のとき　$a^2\leqq b\leqq \dfrac{3}{2}a^2+a+\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 1$　のとき　$a^2\leqq b\leqq 3a^2-4a+2$

（2）$D$ は図の打点部分。ただし，境界線上の点も含む。