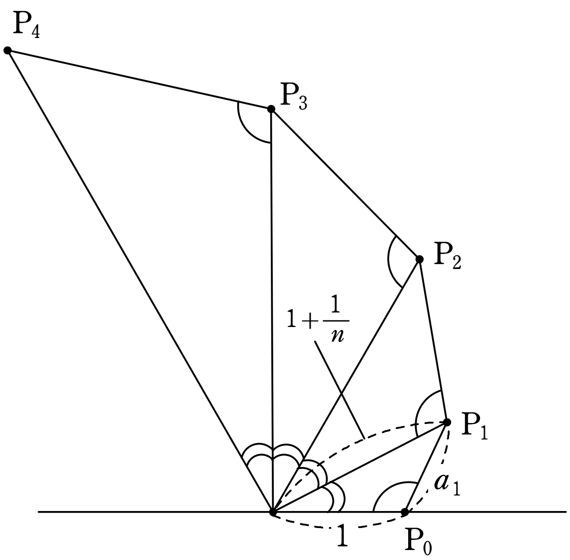
[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{2}$]

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 $\mathrm{O}, \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$ があり，次の 2 つの条件をみたしている。

① $\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k = \dfrac{\pi}{n}$ $(1 \leqq k \leqq n)$, $\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k = \angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ $(2 \leqq k \leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし， $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。



$\triangle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1 \backsim \triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2 \backsim \triangle \mathrm{OP}_2\mathrm{P}_3 \backsim \cdots$ より

$\mathrm{OP}_0 : \mathrm{OP}_1 = \mathrm{OP}_1 : \mathrm{OP}_2 = \mathrm{OP}_2 : \mathrm{OP}_3 = \cdots$ であるから，

隣り合った三角形の相似比は $\mathrm{OP}_0 : \mathrm{OP}_1 = 1 : \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

よって，$\{a_k\}$ は公比 $1+\dfrac{1}{n}$ の等比数列である。

余弦定理より

$$a_1{}^2 = a + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$$

であるから

$$s_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1}\cdot a_1$$

$$= \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}\cdot\frac{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n}}$$

ここで，$\dfrac{1}{n} = u$ とおくと

$$\frac{\sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{1+(1+u)^2-2(1+u)\cos\pi u}}{u}$$

$$=\frac{\sqrt{u^2+2(1+u)(1-\cos\pi u)}}{u}$$

$$=\sqrt{1+2(1+u)\frac{\sin^2\pi u}{1+\cos\pi u}\cdot\frac{1}{u^2}}$$

$$=\sqrt{1+2(1+u)\frac{1}{1+\cos\pi u}\cdot\left(\frac{\sin\pi u}{\pi u}\right)^2\cdot\pi^2}$$

$\to\sqrt{1+\pi^2}$ （$n\to\infty$ のとき $u\to 0$ なので）

よって $\lim_{n\to\infty} s_n=(e-1)\sqrt{1+\pi^2}$