[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{1}$]

n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 次以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数であることを示せ。

ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

$P(x)$ の x^j の係数を a_j とおき，j（$0 \leqq j \leqq n$）についての帰納法で示す。

$$(1+x)^k P(x) = \left(1 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k\right) \times \left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_j x^j + \cdots + a_n x^n + \cdots\right) \quad \cdots ①$$

①の x^j の係数を b_j とおくと，b_j（$0 \leqq j \leqq n$）は整数。

（ⅰ）①の定数項のついて $a_0 = b_0$ であるから，a_0 は整数。

（ⅱ）①の x^j（$1 \leqq j \leqq n$）の係数について，

$$a_j + {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} + {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} + \cdots + {}_k\mathrm{C}_j a_0 = b_j$$ （$k < \ell$ のときは ${}_k\mathrm{C}_\ell = 0$ とみなす）

よって $a_j = b_j - {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} - {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} - \cdots - {}_k\mathrm{C}_j a_0$ となる。

したがって $a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}$ が整数であるならば a_j も整数。

（ⅰ），（ⅱ）より帰納的に a_j（$0 \leqq j \leqq n$）は整数。