[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{1}$]

n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 次以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数であることを示せ。

ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{2}$]

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O, P_0, P_1, $\cdots$, P_n があり，次の 2 つの条件をみたしている。

① $\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{O}\mathrm{P}_k = \dfrac{\pi}{n}$ $(1 \leqq k \leqq n)$, $\angle \mathrm{O}\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k = \angle \mathrm{O}\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ $(2 \leqq k \leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし， $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{3}$]

座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y = x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を 1 : 2 に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし， P = Q のときには R = P とする。

(1) a を $-1 \leqq a \leqq 1$ をみたす実数とするとき，点 (a, b) が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。

[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{4}$]

以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a に対し，2 次の正方行列 $\mathrm{A}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}$ が 5 つの条件

$$\mathrm{A} = a\mathrm{P} + (a+1)\mathrm{Q},\ \mathrm{P}^2 = \mathrm{P},\ \mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q},\ \mathrm{PQ} = \mathrm{O},\ \mathrm{QP} = \mathrm{O}$$

をみたすとする。ただし， $\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。

このとき， $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})\mathrm{A} = \mathrm{A}$ が成り立つことを示せ。

(2) a は正の数として，行列 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$ を考える。この A に対し，(1)の 5 つの条件をすべてみたす行列 P, Q を求めよ。

(3) n を 2 以上の整数とし， $2 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して $\mathrm{A}_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 1 & k+1 \end{pmatrix}$ とおく。

行列の積 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_{n-2}\cdots\mathrm{A}_2$ を求めよ。

[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{5}$]

表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ のあるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。

この硬貨を投げて，次のルール (R) の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは，最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数，m を $0 \leqq m \leqq n$ をみたす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき，最初にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール (R) の下で，n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

[東京大学 2007 年前期 理科 $\boxed{6}$]

(1) $0 < x < a$ をみたす実数 $x,\ a$ に対し，次を示せ。 $\dfrac{2x}{a} < \displaystyle\int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t}\,dt < x\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$

(2) (1)を利用して，次を示せ。 $0.68 < \log 2 < 0.71$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。