[東京大学 2007 年前期 文科 $\boxed{1}$]

連立不等式 $y(y-|x^2-5|+4) \leqq 0$, $y+x^2-2x-3 \leqq 0$ の表す領域を D とする。

(1) D を図示せよ。

(2) D の面積を求めよ。

(1) $y=|x^2-5|-4$ は,

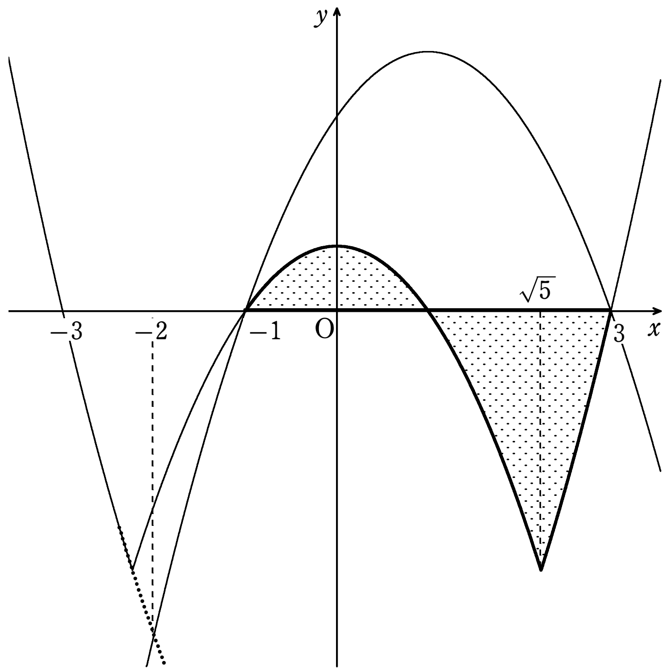
$|x| \leqq \sqrt{5}$ のとき $y=1-x^2$ …①

$|x| \geqq \sqrt{5}$ のとき $y=x^2-9$ …②

①と $y=-x^2+2x+3$ より $x=-1$

②と $y=-x^2+2x+3$ より $x^2-x-6=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)=0$

よって,答えは図の打点部分。ただし,境界上の点を含む。



(2) 求める面積は

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx+\int_{1}^{\sqrt{5}}(x^2-1)\,dx+\int_{\sqrt{5}}^{3}(9-x^2)\,dx=\frac{\{1-(-1)\}^3}{6}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\sqrt{5}}+\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{5}}^{3}$$

$$=20-\frac{20}{3}\sqrt{5}$$

[東京大学 2007 年前期 文科 $\boxed{2}$]

r は $0<r<1$ をみたす実数，n は 2 以上の整数とする。平面上に与えられた 1 つの円を，次の条件①，②をみたす 2 つの円で置き換える操作 (P) を考える。

① 新しい 2 つの円の半径の比は $r:1-r$ で，半径の和はもとの円の半径に等しい。

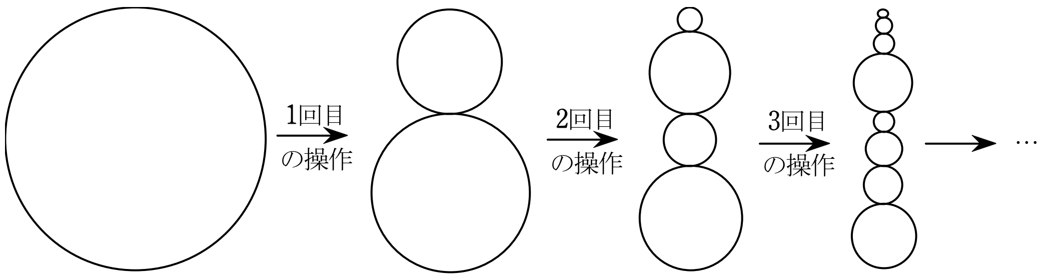
② 新しい 2 つの円は互いに外接し，もとの円に接する。

以下のようにして，平面上に 2^n 個の円を作る。

・最初に平面上に半径 1 の円を描く。

・次に，この円に対して操作 (P) を行い，2 つの円を得る（これを 1 回目の操作という）。

・k 回目の操作で得られた 2^k 個のそれぞれの円について，操作 (P) を行い，2^{k+1} 個の円を得る $(1\leqq k\leqq n-1)$。

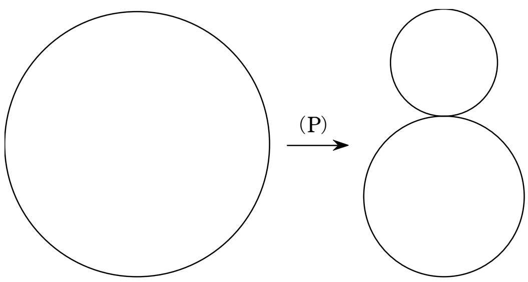


(1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。

(2) 2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ。

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。

操作 (P) で，半径 a の円は，半径 ra，半径 $(1-r)a$ の 2 つの円に置き換わる。 …③



(1) ③の 2 円の周の長さの和は $2\pi ra+2\pi(1-r)a=2\pi a$ で，

操作前の円の周の長さと変わらないから，

操作を行っても，周の長さの合計は変わらない。よって答えは 2π

(2) (3)

③の 2 円の面積の和は

$$\pi(ra)^2+\pi\left\{(1-r)a\right\}^2=\left\{r^2+(1-r)^2\right\}\pi a^2$$

で，操作前の円の $r^2+(1-r)^2$ 倍であるから，

操作を 1 回行うごとに，面積の和は $r^2+(1-r)^2$ 倍される。

よって，(2)の答えは $\pi\left\{r^2+(1-r)^2\right\}^2$，(3)の答えは $\pi\left\{r^2+(1-r)^2\right\}^n$

［ 東京大学 2007 年前期 文科 $\boxed{3}$ ］

正の整数で下 2 桁とは，100 の位以上を無視した数をいう。

たとえば 2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。

m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

$m=10a+b$（a, b は負でない整数で $0 \leqq b \leqq 9$）

$5m^4 = 5(10a+b)^4$

$= 5(10000a^4 + 4000a^3b + 600a^2b^2 + 40ab^3 + b^4)$

$= 100(500a^4 + 200a^3b + 30a^2b^2 + 2ab^3) + 5b^4$

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^4 の下 2 桁	0	1	16	81	56	25	96	1	96	61
$5b^4$ の下 2 桁	0	5	80	5	80	25	80	5	80	5

よって答えは 0, 5, 25, 80

[東京大学 2007 年前期 文科 $\boxed{4}$]

表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ のあるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。この硬貨を投げて，次のルール (R) の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは，最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数，m を $0 \leqq m \leqq n$ をみたす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき，最初にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール (R) の下で，n 回の硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

---

(1)（ｉ）$m=n$ のとき

n 回とも表で，$p_n = p^n$

（ii）$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

最後の m 回が表で，最後から $m+1$ 回目が裏の場合であるから，

$p_m = (1-p)p^m$

(2)（ｉ）$m=n$ のとき

高さは必ず n 以下なので，$q_n = 1$

（ii）$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

高さが m より大きくなるのは最後の $m+1$ 回が表の場合であるから

$q_m = 1 - p^{m+1}$

(3) 1 回目が m，2 回目が m 以下になる確率 …①

1 回目が m 以下，2 回目が m になる確率 …②

はそれぞれ $p_m q_m$ であり，①，②には 2 回とも m の場合が重複しているから

$$r_m = 2p_m q_m - {p_m}^2 = p_m(2q_m - p_m)$$

（ｉ）$m = n$ のとき

$$r_n = p^n\left(2 - p^n\right)$$

（ⅱ）$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

$$r_m = (1-p)p^m\left\{2(1-p^{m+1}) - (1-p)p^m\right\}$$

$$= (1-p)p^m\left(2 - p^m - p^{m+1}\right)$$