**[ 東京大学 2007 年前期 文科 $\boxed{4}$ ]**

表が出る確率が $p$，裏が出る確率が $1-p$ のあるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。この硬貨を投げて，次のルール $(\mathrm{R})$ の下で，ブロック積みゲームを行う。

$(\mathrm{R})$
① ブロックの高さは，最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

$n$ を正の整数，$m$ を $0\leqq m\leqq n$ をみたす整数とする。

(1) $n$ 回硬貨を投げたとき，最初にブロックの高さが $m$ となる確率 $p_m$ を求めよ。

(2) (1)で，最後にブロックの高さが $m$ 以下となる確率 $q_m$ を求めよ。

(3) ルール $(\mathrm{R})$ の下で，$n$ 回の硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが $m$ である確率 $r_m$ を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

---

(1)（ⅰ）$m=n$ のとき

$n$ 回とも表で，$p_n=p^n$

（ⅱ）$0\leqq m\leqq n-1$ のとき

最後の $m$ 回が表で，最後から $m+1$ 回目が裏の場合であるから，

$p_m=(1-p)p^m$

(2)（ⅰ）$m=n$ のとき

高さは必ず $n$ 以下なので，$q_n=1$

（ⅱ）$0\leqq m\leqq n-1$ のとき

高さが $m$ より大きくなるのは最後の $m+1$ 回が表の場合であるから

$q_m=1-p^{m+1}$

(3) 1 回目が $m$，2 回目が $m$ 以下になる確率 …①

1 回目が $m$ 以下，2 回目が $m$ になる確率 …②

はそれぞれ $p_m q_m$ であり，①，②には 2 回とも $m$ の場合が重複しているから

$$r_m = 2p_m q_m - {p_m}^2 = p_m(2q_m - p_m)$$

（ i ）$m = n$ のとき

$$r_n = p^n\left(2 - p^n\right)$$

（ ii ）$0 \leqq m \leqq n-1$ のとき

$$r_m = (1-p)p^m\left\{2(1-p^{m+1}) - (1-p)p^m\right\}$$

$$= (1-p)p^m\left(2 - p^m - p^{m+1}\right)$$