[東京大学 2007 年前期 文科 $\boxed{2}$]

r は $0<r<1$ をみたす実数，n は 2 以上の整数とする。平面上に与えられた 1 つの円を，次の条件①，②をみたす 2 つの円で置き換える操作 (P) を考える。

① 新しい 2 つの円の半径の比は $r:1-r$ で，半径の和はもとの円の半径に等しい。

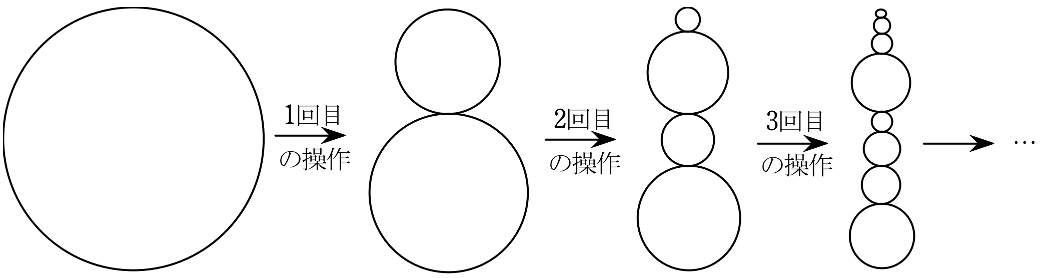
② 新しい 2 つの円は互いに外接し，もとの円に接する。

以下のようにして，平面上に 2^n 個の円を作る。

・最初に平面上に半径 1 の円を描く。

・次に，この円に対して操作 (P) を行い，2 つの円を得る（これを 1 回目の操作という）。

・k 回目の操作で得られた 2^k 個のそれぞれの円について，操作 (P) を行い，2^{k+1} 個の円を得る $(1 \leqq k \leqq n-1)$。

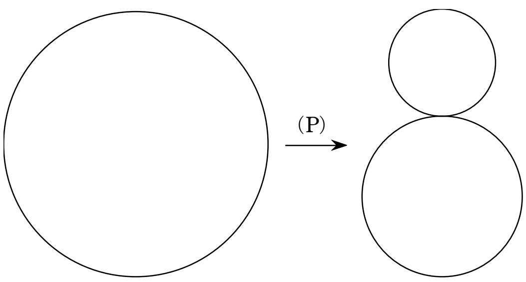


(1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。

(2) 2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ。

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。

操作 (P) で，半径 a の円は，半径 ra，半径 $(1-r)a$ の 2 つの円に置き換わる。 …③



(1) ③の 2 円の周の長さの和は $2\pi ra+2\pi(1-r)a=2\pi a$ で，

操作前の円の周の長さと変わらないから，

操作を行っても，周の長さの合計は変わらない。よって答えは 2π

(2) (3)

③の 2 円の面積の和は

$$\pi(ra)^2+\pi\left\{(1-r)a\right\}^2=\left\{r^2+(1-r)^2\right\}\pi a^2$$

で，操作前の円の $r^2+(1-r)^2$ 倍であるから，

操作を 1 回行うごとに，面積の和は $r^2+(1-r)^2$ 倍される。

よって，(2)の答えは $\pi\left\{r^2+(1-r)^2\right\}^2$，(3)の答えは $\pi\left\{r^2+(1-r)^2\right\}^n$