[東京大学 2006 年後期 $\boxed{1}$]

xy 平面上で t を変数とする媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = t + 2t^2 \end{cases}$ で表される曲線を C とする。

次の問に答えよ。

(1) $t \neq -1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。

(2) 曲線 C 上で $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}$ を満たす点 A の座標を求めよ。

(3) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ を $(X,\ Y)$ に移す移動が $\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \end{cases}$ で表されているとする。

このとき Y を X を用いて表せ。

(4) 曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

---

(1) $\dfrac{dx}{dt} = 2 + 2t,\ \dfrac{dy}{dt} = 1 + 4t$ であるから

$t \neq -1$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+4t}{2(1+t)}$ …①

(2) $\dfrac{1+4t}{2(1+t)} = -\dfrac{1}{2}$ を解くと $t = -\dfrac{2}{5}$

よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + t^2 \\ t + 2t^2 \end{pmatrix}$ に代入して $\mathrm{A}\left(-\dfrac{16}{25},\ -\dfrac{2}{25}\right)$

(3) $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ …② および $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ から

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3t \\ 5t^2 + 4t \end{pmatrix}$ なので

$X = \dfrac{3}{\sqrt{5}}t,\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(5t^2 + 4t\right)$

ここから t を消去して

$Y = \dfrac{5\sqrt{5}}{9}X^2 + \dfrac{4}{3}X$ …③

(4) $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を満たす θ は存在する。

このθによって②は $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せ，

これは原点中心の θ 回転の移動を表すから

C は放物線③を原点中心に $-\theta$ 回転したものとなる。

つまり， XY 平面に描いた図形を図のように xy 平面に重ねればよい。

このとき，放物線の頂点は，頂点における接線の傾きが X 軸，

つまり $y=-\dfrac{1}{2}x$ に平行となることから，(2)より A となる。

また，放物線の軸は A を通り Y 軸，つまり $y=2x$ に平行な直線であるから

$y=2x+\dfrac{6}{5}$ となる。

さらに， C と x 軸， y 軸との交点は

$x=0 \iff t=-2,\ 0$

$y=0 \iff t=-\dfrac{1}{2},\ 0$

であるから， $(0,0)$， $(0,6)$， $\left(-\dfrac{3}{4},\ 0\right)$ となる。

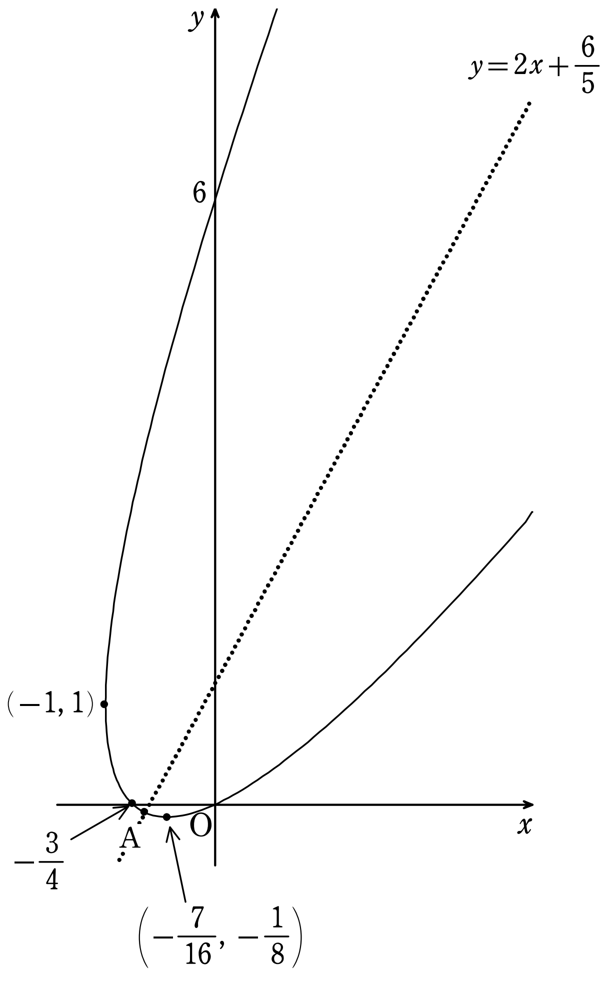
そして， x 座標， y 座標が最小となる点は

$\dfrac{dx}{dt}=0 \iff t=-1$

$\dfrac{dy}{dt}=0 \iff t=-\dfrac{1}{4}$

によりそれぞれ $(-1,1)$， $\left(-\dfrac{7}{16},\ -\dfrac{1}{8}\right)$ となる。

以上を踏まえて図示すると，右図のようになる。



[東京大学 2006 年後期 $\boxed{2}$]

a を正の実数，θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。

xyz 空間において，点 $(a, 0, 0)$ と点 $(a+\cos\theta, 0, \sin\theta)$ を結ぶ線分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を S とする。さらに，S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。

次の問に答えよ。

(1) V を a と θ を用いて表せ。

(2) $a=4$ とする。V を θ の関数と考えて，V の最大値を求めよ。

(1) S は $\theta=0$ のとき線分，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき円錐の側面，

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき円板となる。

S は xz 平面（$y=0$）に関して対称であるから，

V は $y \geqq 0$ の部分の体積の 2 倍である。

(ｉ) $\theta=0$ のとき

S は線分だから $V=0$ となる。

(ⅱ) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

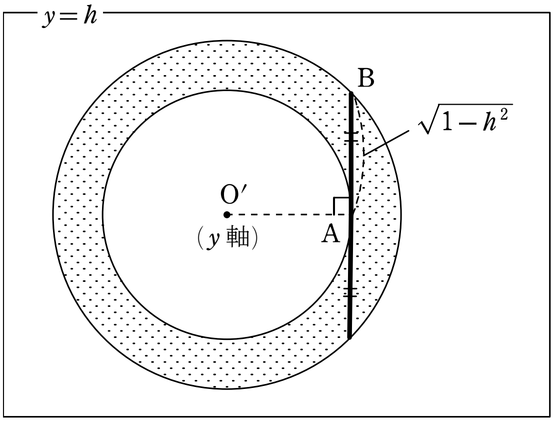
S を $y=h$（$0 \leqq h \leqq 1$）で切った切り口は図のような線分となる。

よって S を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の

平面 $y=h$ による切り口の断面積 $S(h)$ は

$S(h)=\pi\left(\mathrm{O'B}^2-\mathrm{O'A}^2\right)=\pi\mathrm{AB}^2=\pi(1-h^2)$ となり，

$V=2\pi\displaystyle\int_0^1(1-h^2)\,dh=\frac{4}{3}\pi$ となる。



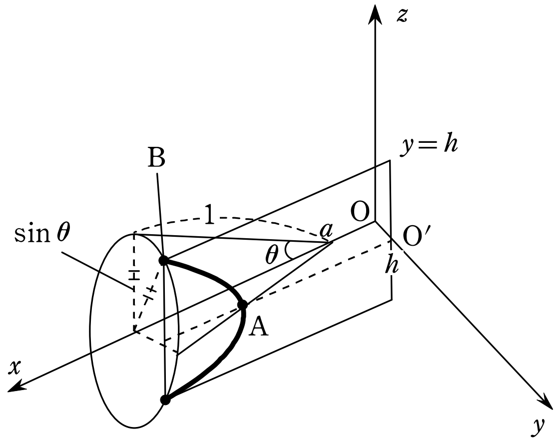
（iii）$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

S を平面　$y=h$（$0\leqq h\leqq \sin\theta$）で切った切り口は，

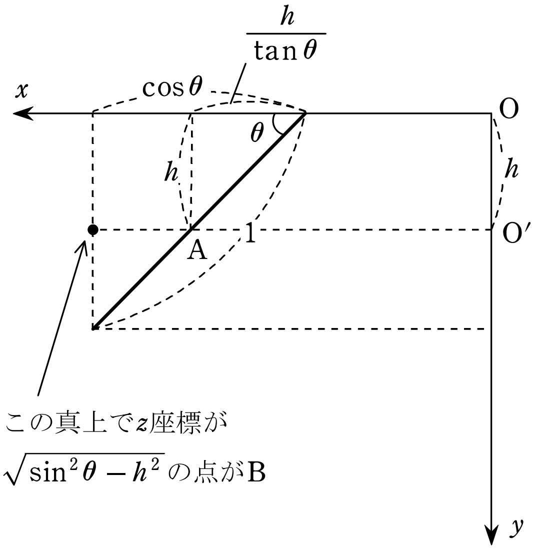
図の太線（双曲線，ただし，$h=0$ のときは折れ線）

のようになり，

O′ から一番近い点と遠い点は，右図の A, B である。



そして，右下図のようになることから



$$\mathrm{A}\left(a+\frac{h}{\tan\theta},\ h,\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(a+\cos\theta,\ h,\ \sqrt{\sin^2\theta-h^2}\right)$$

よって，平面　$y=h$　による切り口の面積 $S(h)$ は

$$S(h)=\pi\left(\mathrm{O'B}^2-\mathrm{O'A}^2\right)$$

$$=\pi\left\{(a+\cos\theta)^2+(\sin^2\theta-h^2)-\left(a+\frac{h}{\tan\theta}\right)^2\right\}$$

$$=\pi\left\{1+2a\cos\theta-\frac{2ah}{\tan\theta}-\frac{h^2}{\sin^2\theta}\right\}$$

したがって

$$V=2\int_0^{\sin\theta}S(h)\,dh$$

$$=2\pi\int_0^{\sin\theta}\left\{1+2a\cos\theta-\frac{2ah}{\tan\theta}-\frac{h^2}{\sin^2\theta}\right\}dh$$

$$=2\pi\left[(1+2a\cos\theta)h-\frac{a}{\tan\theta}h^2-\frac{1}{3\sin^2\theta}h^3\right]_0^{\sin\theta}$$

$$=2\pi\left\{(1+2a\cos\theta)\sin\theta-a\sin\theta\cos\theta-\frac{\sin\theta}{3}\right\}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\sin\theta\left(3a\cos\theta+2\right)$$

となる。

（iii）において $\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ とおいたものは，それぞれ（ⅰ），（ⅱ）に一致するので

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $V=\dfrac{2\pi}{3}\sin\theta\left(3a\cos\theta+2\right)$ となる。

（4） $a=4$ より $V=\dfrac{4\pi}{3}\sin\theta\left(6\cos\theta+1\right)$ であるから

$$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{dV}{d\theta}=\cos\theta(6\cos\theta+1)-\sin\theta\cdot 6\sin\theta$$

$$=6\cos^2\theta+\cos\theta-6\sin^2\theta$$

$$=12\cos^2\theta+\cos\theta-6$$

$$=(3\cos\theta-2)(4\cos\theta+3)$$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ を満たす α （$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$）をとると

V の増減は次表に従う。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dV}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

よって $\theta=\alpha$ のとき V は最大となり，このとき $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ であるから

$V=\dfrac{4\pi}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}\cdot 5=\dfrac{20\sqrt{5}}{9}\pi$ となる。

［ 東京大学 2006 年後期 $\boxed{3}$ ］

数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

などについて，次のような一般的な考察をしてみよう。 $p,\ n$ を自然数とする。

(1) $p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ があって，数列の和 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ が $S_p(n)$ と表されることを示せ。

(2) q を自然数とする。(1)の多項式 $S_1(x),\ S_3(x),\ \cdots,\ S_{2q-1}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q} a_j S_{2j-1}(x)=x^q(x+1)^q$$

が恒等式となるような定数 $a_1,\ \cdots,\ a_q$ を q を用いて表せ。

(3) q を 2 以上の自然数とする。(1)の多項式 $S_2(x),\ S_4(x),\ \cdots,\ S_{2q-2}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x)=x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$$

が恒等式となるような定数 c と $b_1,\ \cdots,\ b_{q-1}$ を q を用いて表せ。

(4) p を 3 以上の奇数とする。このとき，

$$\frac{d}{dx}S_p(x)=pS_{p-1}(x)$$

を示せ。

2 つの多項式 $f(x),\ g(x)$ が恒等式となる必要十分条件は

$f(0)=g(0)$ …（＊） かつ $f(x)-f(x-1)=g(x)-g(x-1)$ が恒等式

が成立することである。

(1) (2), (3)における（＊）に相当する議論のために，

$S_p(x)$ は $S_p(0)=0$ なる $p+1$ 次多項式 …（＊２）

であることを示す。

$p=1$ のとき $S_1(x)=\dfrac{1}{2}x(x+1)$ は $S_1(0)=0$ の 2 次式であるから（＊２）は成立。

$p=1,2,\cdots,\ell$ のとき（＊２）が成立すると仮定する。

このとき，$(k+1)^{\ell+2}-k^{\ell+2}=(\ell+2)k^{\ell+1}+\sum_{i=1}^{\ell}{}_{\ell+2}\mathrm{C}_i k^i+1$ …① が成立し，

①で，$k=1,2,\cdots,n$ としたものを加えると

$(n+1)^{\ell+2}-1=(\ell+2)S_{\ell+1}(n)+\sum_{i=1}^{\ell}{}_{\ell+2}\mathrm{C}_i S_i(n)+n$ となり

$$S_{\ell+1}(n)=\frac{1}{\ell+2}\left\{(n+1)^{\ell+2}-\overbrace{\sum_{i=1}^{\ell}{}_{\ell+2}\mathrm{C}_i S_i(n)-n-1}^{n\text{の}n+1\text{次以下の多項式}}\right\}$$ が任意の自然数 n について成立する。

よって，$S_{\ell+1}(x)$ は $\ell+2$ 次の多項式となる。

また，$S_{\ell+1}(0)=\frac{1}{\ell+2}\left\{1-\sum_{i=1}^{\ell}{}_{\ell+2}\mathrm{C}_i\cdot 0-0-1\right\}=0$ であるから，

（＊２）は $p=\ell+1$ のときも成立する。

よって数学的帰納法により，

任意の自然数 p に対して $S_p(x)$ は $S_p(0)=0$ を満たす $p+1$ 次多項式となる。

(2) 多項式に関する等式 $\sum_{j=1}^{q}a_j S_{2j-1}(x)=x^q(x+1)^q$ …②

が恒等式となる条件は，②が $x=0$ で成立し，かつ

$\sum_{j=1}^{q}a_j\left\{S_{2j-1}(x)-S_{2j-1}(x-1)\right\}=x^q(x+1)^q-(x-1)^q x^q$ …③ が恒等式となることである。

今，任意の自然数 x に対して

$S_p(x)-S_p(x-1)=x^p$ …④

が成立するので，④は恒等式であり，これより③は

$\sum_{j=1}^{q}a_j x^{2j-1}=x^q(x+1)^q-(x-1)^q x^q$ …⑤

となる。

$x=0$ のとき ②は $0=0$ となり成立するので，②が恒等式となる必要十分条件は

⑤が恒等式となることである。

⑤の右辺は $x^q(x+1)^q-(x-1)^q x^q=x^q\left\{(x+1)^q-(x-1)^q\right\}$ であるが，

$(x \pm 1)^q = {}_q\mathrm{C}_0 x^q \pm {}_q\mathrm{C}_1 x^{q-1} + {}_q\mathrm{C}_2 x^{q-2} \pm {}_q\mathrm{C}_3 x^{q-3} + \cdots$（複号同順）

であるので

$$x^q \left\{ (x+1)^q - (x-1)^q \right\} = 2x^q \left\{ {}_q\mathrm{C}_1 x^{q-1} + {}_q\mathrm{C}_3 x^{q-3} + \cdots \right\}$$

$$= 2{}_q\mathrm{C}_1 x^{2q-1} + 2{}_q\mathrm{C}_3 x^{2q-3} + \cdots$$

となるので，

$a_q = 2{}_q\mathrm{C}_1,\ a_{q-1} = 2{}_q\mathrm{C}_3,\ \cdots,\ a_{q-i} = 2{}_q\mathrm{C}_{2i+1}, \cdots$

と定めれば⑤は恒等式となり，よって②も恒等式となる。

ただし，$2i+1 > q$ のとき $a_{q-i} = 0$ である。

ここで，$q - i = j$ とおき，i を消去すると

$$a_j = \begin{cases} 2{}_q\mathrm{C}_{2(q-j)+1} & \left(\dfrac{q+1}{2} \leqq j \right) \\ 0 & \left(j < \dfrac{q+1}{2} \right) \end{cases}$$

(3) (2)と同様に考えれば

$\displaystyle\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$ …⑥

が $x=0$ で成立することから

$f(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$ とおくと

$\displaystyle\sum_{j=1}^{q-1} b_j x^{2j} = f(x) - f(x-1)$（$= F(x)$ とおく） …⑦

が恒等式となれば⑥は恒等式である。

今，⑦の左辺は偶関数である。右辺がそうなるためには

$F(1) = F(-1)$

⇔ $f(1) - f(0) = f(-1) - f(-2)$

⇔ $2^{q-1}(c+q) = -2^{q-1}(-2c+q)$

⇔ $c = 2q$

が必要であり，このとき

$$F(x) = qx^{q-1}\left\{(x+1)^{q-1}(2x+1)-(x-1)^{q-1}(2x-1)\right\}$$

$$= qx^{q-1}\left\{(x+1)^{q}-(x-1)^{q}\right\}+qx^{q}\left\{(x+1)^{q-1}-(x-1)^{q-1}\right\}$$

$$= 2q\left({}_q\mathrm{C}_1+{}_{q-1}\mathrm{C}_1\right)x^{2q-2}+2q\left({}_q\mathrm{C}_3+{}_{q-1}\mathrm{C}_3\right)x^{2q-4}+\cdots+2q\left({}_q\mathrm{C}_{2i-1}+{}_{q-1}\mathrm{C}_{2i-1}\right)x^{2q-2i}+\cdots$$

は偶関数となる。ここで，

$$\begin{aligned}{}_q\mathrm{C}_{2i-1}+{}_{q-1}\mathrm{C}_{2i-1} &= {}_q\mathrm{C}_{2i-1}+\frac{(q-1)!}{(2i-1)!(q-2i)!}\\ &= {}_q\mathrm{C}_{2i-1}+\frac{q-2i+1}{q}\,{}_q\mathrm{C}_{2i-1}\\ &= \frac{2q-2i+1}{q}\,{}_q\mathrm{C}_{2i-1}\end{aligned}$$

であるから，

$$F(x) = 2(2q-1)\,{}_q\mathrm{C}_1x^{2q-2}+2(2q-3)\,{}_q\mathrm{C}_3x^{2q-4}+\cdots+2(2q-2i+1)\,{}_q\mathrm{C}_{2i-1}x^{2q-2i}+\cdots$$

となり，$b_{q-i}=2\left\{2(q-i)+1\right\}{}_q\mathrm{C}_{2i-1}$ と定めれば⑦は恒等式となり，よって⑥も恒等式となる。

ただし，$2i-1>q$ のとき $b_{q-i}=0$ である。

ここで，$q-i=j$ とおき i を消去すると

$$b_j=\begin{cases}2(2j+1)\,{}_q\mathrm{C}_{2(q-j)-1} & \left(\dfrac{q-1}{2}\leqq j\right)\\ 0 & \left(j<\dfrac{q-1}{2}\right)\end{cases}$$

(4) まず，(2)，(3)により

$$b_{j-1}=\begin{cases}2(2j-1)\,{}_q\mathrm{C}_{2(q-j)+1} & \left(\dfrac{q+1}{2}\leqq j\right)\\ 0 & \left(j<\dfrac{q+1}{2}\right)\end{cases}$$

$$=(2j-1)a_j \quad \cdots⑧$$

が成立する。このとき $p=2\ell-1$（$\ell\geqq2$）に対して

$S_p{}'(x)=pS_{p-1}(x)$ すなわち $S_{2\ell-1}{}'(x)=(2\ell-1)S_{2\ell-2}(x)$ …（＊３）

の成立を帰納法で示す。

$\ell=2$ のとき

$$S_3{}'(x)=2\left\{\frac{x(x+1)}{2}\right\}\cdot\left\{\frac{x(x+1)}{2}\right\}'=2\left\{\frac{x(x+1)}{2}\right\}\cdot\frac{(x+1)+x}{2}=\frac{1}{2}x(x+1)(2x+1)=3S_2(x)$$

により（＊３）は成立。

$\ell=2,\ 3,\ \cdots,\ q-1$（$q \geqq 3$）での成立を仮定すると

$$\left.\begin{array}{l} S_3{}'(x)=3S_2(x),\ S_5{}'(x)=5S_4(x),\ \cdots, \\ S_{2j+1}{}'(x)=(2j+1)S_{2j}(x),\ \cdots, \\ S_{2q-3}{}'(x)=(2q-3)S_{2q-4}(x) \end{array}\right\}\ \cdots⑨$$

である。

ここで，$x^q(x+1)^{q+1}=a_1S_1(x)+a_2S_3(x)+a_3S_5(x)+\cdots+a_{q-1}S_{2q-3}(x)+a_qS_{2q-1}(x)$

の両辺を微分すると，⑧，⑨により

$$qx^{q-1}(x+1)^{q-1}(2x+1)=a_1S_1{}'(x)+3a_2S_2(x)+5a_3S_4(x)+\cdots+(2q-3)a_{q-1}S_{2q-4}(x)+a_qS_{2q-1}{}'(x)$$

$$=a_1S_1{}'(x)+b_1S_2(x)+b_2S_4(x)+\cdots+b_{q-2}S_{2q-4}(x)+a_qS_{2q-1}{}'(x)$$

が成立する。よって(3)から

$$\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x)=a_1S_1{}'(x)+b_1S_2(x)+b_2S_4(x)+\cdots+b_{q-2}S_{2q-4}(x)+a_qS_{2q-1}{}'(x)$$

つまり $a_1S_1{}'(x)+a_qS_{2q-1}{}'(x)=b_{q-1}S_{2q-2}(x)$

$$=(2q-1)a_qS_{2q-2}(x)$$

となる。

さて，(2)から $q \geqq 3$ のとき $a_1=0$ であり，また $a_q=2{}_q\mathrm{C}_1\neq 0$ により

$S_{2q-1}{}'(x)=(2q-1)S_{2q-2}(x)$ となるので，（＊３）は $\ell=q$ でも成立する。

以上から 3 以上の奇数 p に対して $S_p{}'(x)=pS_{p-1}(x)$ が成立する。