[東京大学 2006 年後期 $\boxed{1}$]

xy 平面上で t を変数とする媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = t + 2t^2 \end{cases}$ で表される曲線を C とする。

次の問に答えよ。

(1) $t \neq -1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。

(2) 曲線 C 上で $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}$ を満たす点 A の座標を求めよ。

(3) 曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ を $(X,\ Y)$ に移す移動が $\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) \end{cases}$ で表されているとする。

このとき Y を X を用いて表せ。

(4) 曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

[東京大学 2006 年後期 $\boxed{2}$]

a を正の実数，θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。

xyz 空間において，点 $(a,\ 0,\ 0)$ と点 $(a+\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta)$ を結ぶ線分を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を S とする。さらに，S を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。

次の問に答えよ。

(1) V を a と θ を用いて表せ。

(2) $a=4$ とする。V を θ の関数と考えて，V の最大値を求めよ。

[東京大学 2006 年後期 $\boxed{3}$]

数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

などについて，次のような一般的な考察をしてみよう。$p,\ n$ を自然数とする。

(1) $p+1$ 次多項式 $S_p(x)$ があって，数列の和 $\sum_{k=1}^{n} k^p$ が $S_p(n)$ と表されることを示せ。

(2) q を自然数とする。(1)の多項式 $S_1(x),\ S_3(x),\ \cdots,\ S_{2q-1}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q} a_j S_{2j-1}(x) = x^q(x+1)^q$$

が恒等式となるような定数 $a_1,\ \cdots,\ a_q$ を q を用いて表せ。

(3) q を 2 以上の自然数とする。(1)の多項式 $S_2(x),\ S_4(x),\ \cdots,\ S_{2q-2}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q-1} b_j S_{2j}(x) = x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$$

が恒等式となるような定数 c と $b_1,\ \cdots,\ b_{q-1}$ を q を用いて表せ。

(4) p を 3 以上の奇数とする。このとき，

$$\frac{d}{dx}S_p(x) = pS_{p-1}(x)$$

を示せ。